1. Spazi metrici (ripasso).

Uno spazio metrico è un insieme X con una funzione "distanza"

$$\begin{aligned} X \times X &\xrightarrow{d} \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) \end{aligned}$$

che ha le seguenti proprietà:

A. $d(x,y)=0$ se e solo se $x=y$.

B. $d(x,y) = d(x,y)$.

C. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Esempio 1

$\mathbb{R}^n$ con la distanza euclidea

$$d_2(x,y) := \| x-y \| = \left(\sum_i (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Esempio 2

$\mathbb{R}^n$ con la distanza

$$d_1(x,y) := \sum_i |x_i - y_i|$$

Esempio 3

$\mathbb{R}^n$ con la distanza

$$d(x,y) := \max_i \{ |x_i - y_i| \}$$

Esempio 4

Un insieme X con la distanza

$$d_0(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

DEF 1 Sia (X,d) uno spazio metrico. La palla aperta di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$ è

$$B(x_0,r) := \{ x \in X \mid d(x_0,x) < r \}.$$

DEF 2 Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) spazi metrici. Un'applicazione

$$X \xrightarrow{f} Y$$

è continua in $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon).$$

L'applicazione f è continua se è continua in ogni punto del dominio.

Esempio 5 Se abbiamo due distanze d e d' sullo stesso insieme X, possiamo chiederci se l'identità

$$X \xrightarrow{Id_X} X$$

sia continua vista come applicazione da (X, d) a (X, d'), cioè se per ogni $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \implies d'(x, x_0) < \varepsilon$$

L'identità $\mathbb{R}^n \xrightarrow{Id} \mathbb{R}^n$ è continua come applicazione da $(\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$ o come applicazione da $(\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ o come applicazione da $(\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ etc. (possiamo permutare le distanze d_2, d_1, d_∞ degli Esempi 1, 2, 3).

Sia d_0 la distanza su $\mathbb{R}^n$ dell'Esempio 4. Allora

$$(\mathbb{R}^n, d_0) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, d_2) \text{ è continua}$$

ma

$$(\mathbb{R}^n, d_2) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, d_0) \text{ non è continua.}$$

se $n > 0$.

2. Dagli spazi metrici alla topologia

DEF 3 Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subset X$ è <u>aperto</u> se per ogni $x_0 \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$B(x_0, \varepsilon) \subset A.$$

L'osservazione cruciale è la seguente.

PROP 1 Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici, e sia

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

1. f è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni aperto $B \subset Y$ contenente $f(x_0)$ esiste un aperto $A \subset X$ contenente x_0 tale che

$$f(A) \subset B$$

2. f è continua se e solo se per ogni aperto $B \subset Y$ la controimmagine $f^{-1}(B)$ è un aperto di X.

Esempio 6 Gli aperti di $(\mathbb{R}^n, d_2)$ sono gli stessi aperti di $(\mathbb{R}^n, d_1)$ e sono gli stessi aperti di $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. Questo "spiega" l'Esempio 5.

Gli aperti di $(\mathbb{R}^n, d_0)$ (d_0 dell'Esempio 4) sono i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (senza alcuna condizione), questo "spiega" perché l'identità

$$(\mathbb{R}^n, d_2) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, d_0)$$

non è continua.

La conseguenza è che si può definire il concetto di "vicinanza" dando solo i "sottoinsiemi aperti".

DEF 4 (Fondamentale) Uno spazio topologico è un insieme X con una collezione τ di sottoinsiemi di X che hanno le seguenti proprietà:

1. $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$
2. Se $A, B \in \tau$ allora $A \cap B \in \tau$
3. Se $A_i \in \tau$ per $i \in I$, allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

τ è una topologia su X e i sottoinsiemi di X che appartengono a τ sono gli aperti della topologia τ.

Esempio 7 Sia (X, d) uno spazio metrico. La collezione τ_d degli aperti per la metrica d sodisfanno 1, 2, 3 della Def. 4, e quindi τ_d è una topologia su X.

Notate che se $X = \mathbb{R}^n$, allora $\tau_{d_2} = \tau_{d_1} = \tau_{d_\infty}$.

$\boxed{\text{Notazione}}$ Denotiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio topologico $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$

Topologia euclidea.

Esempio 8 Sia X un insieme e sia $\tau = \wp(X)$. Allora valgono 1, 2, 3 della Def. 4, e quindi τ definisce una topologia su X, che si chiama la topologia discreta.

Esempio 9 Sia X un insieme e sia

$$\tau = \{\emptyset, X\}.$$

Questa è una topologia su X, che si chiama la topologia banale (o indiscreta)

Esempio 10 Sia X un insieme. Sia τ la collezione dei sottoinsiemi $A \subset X$ tali che

$$X \setminus A \text{ è finito o tutto } X.$$

Allora τ è una topologia, la topologia cofinita su X.

3. Significato di "topologia".

In uno spazio metrico (X,d) sappiamo cosa vuol dire che "$x, y \in X$ sono vicini": significa che $d(x,y)$ è "piccola". Più precisamente

$$x_n \to x \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Sia (X, τ) uno spazio topologico. La distanza tra $x, y \in X$ non ha senso, ma possiamo dare senso alla nozione di limite.

DEF 5 La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (con $x_n \in X$) tende a $x \in X$ se per ogni aperto $A \subset X$ contenente x esiste $N(A)$ tale che

$$x_n \in A \quad \text{se} \quad n \geq N(A).$$

In simboli

$$x_n \to x \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

Esempio 11 Se (X,d) è uno spazio metrico, e τ_d la topologia metrica, allora

$$x_n \to x \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

per la topologia τ_d se e solo se $x_n \to x$ per $n \to \infty$ in senso metrico.

Esempio 13 Sia τ_{cof} la topologia cofinita su $\mathbb{R}$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ con la proprietà che per ogni $c\in\mathbb{R}$

$$|\{n\in\mathbb{N} \mid x_n=c\}| < \infty$$

(Per esempio una successione in cui $x_m\neq x_n$ se $m\neq n$.)

Allora, nella topologia τ_{cof}, per ogni $a\in\mathbb{R}$ si ha che

$$x_n\to a \quad \text{per } n\to\infty.$$

Esempio 14 Sia τ la topologia discreta su un insieme X, sia $\{x_n\}$ una successione in X, e sia $a\in X$. Allora

$$x_n\to a \quad \text{per } n\to\infty$$

se e solo se $x_n=a$ per $n\gg 0$.