1. Applicazioni continue tra spazi topologici.

Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici, e sia

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

DEF 1

1. L'applicazione f è continua in $x_0 \in X$ se, per ogni aperto $V \subset Y$ contenente $f(x_0)$, esiste un aperto $U \subset X$ contenente x_0 tale che

$$f(U) \subset V.$$

2. L'applicazione f è continua se è continua in ogni punto di X.

OSS 1 La f è continua se e solo se, per ogni $V \subset Y$ aperto, $f^{-1}(V)$ è un aperto di X.

Esempio 1 Se (X, d_X) e (Y, d_Y) sono spazi metrici, un'applicazione

$$X \xrightarrow{f} Y$$

è metricamente continua in un punto se e solo se lo è per le topologie associate alle distanze.

Esempio 2. Sia τ_{sup} la collezione delle semirette aperte (infinite a sinistra)

$$(-\infty, a) \subset \mathbb{R}$$

incluso $\emptyset = (-\infty, -\infty)$ e $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Allora τ_{sup} è una topologia su $\mathbb{R}$ detta della semicontinuità superiore. Un'applicazione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \tau_{sup})$$

è continua in $a \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{per} \quad |x-a| < \delta.$$

Si dice che f è semicontinua superiormente.

Per esempio

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] = \text{parte intera di } x \end{aligned}$$

è semicontinua superiormente, ma

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -[x] \end{aligned}$$

non è semicontinua superiormente.

2. Chiusi di uno spazio topologico.

DEF 2 Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $B \subset X$ è chiuso se $X \setminus B$ è aperto.

PROP 1 Sia (X, τ) uno spazio topologico.

1. $\emptyset$ e X sono chiusi.
2. Se $B, C \subset X$ sono chiusi, allora
$$B \cup C$$
è chiuso.
3. Se $B_i \subset X$ per $i \in I$ sono chiusi, allora
$$\bigcap_{i \in I} B_i \quad \text{è chiuso.}$$

D'altra parte, supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una collezione di sottoinsiemi di un insieme X (primo di topologia) tale che

1. $\emptyset$ e X sono in $\mathcal{C}$
2. Se $B, C \in \mathcal{C}$, allora $B \cup C$ è in $\mathcal{C}$
3. Se B_i è in $\mathcal{C}$ per $i \in I$, allora

$$\bigcap_{i \in I} B_i$$

è in $\mathcal{C}$.

Allora la collezione

$$\tau := \{ X \setminus B \mid B \in \mathcal{C} \}$$

soddisfa gli assiomi per gli aperti di una topologia.

Conclusione: una topologia può essere definita dalla collezione degli aperti o dei chiusi.

Esempio 3 Sia K un campo. Se $S \subset K[x_1, \dots, x_n]$

Insieme dei polinomi in $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in K

poniamo

$$V(S) := \{ x \in K^n \mid f(x) = 0 \text{ per ogni } x \in K^n \}.$$

La collezione dei $V(S) \subset K^n$ soddisfa gli assiomi per i chiusi di una topologia, che si chiama <u>topologia di Zariski</u>.

La topologia di Zariski su K è uguale alla topologia cofinita, ma su K^n per $n \geq 2$ <u>non</u> è la topologia cofinita.

3. Base di uno spazio topologico.

(X, τ) spazio topologico.

DEF 3 Una sottocollezione $\mathcal{B} \subset \tau$ è una base dello spazio topologico (X, τ) se ogni aperto è unione di insiemi in $\mathcal{B}$.

Esempio 5 τ è una base di τ. Questo è un esempio banale. Una base è utile se è (molto più) piccola di τ.

Esempio 6 (X, d) spazio metrico, τ_d topologia associata. Allora

$$\mathcal{B} := \{ B(x, \varepsilon) \mid x \in X \quad \varepsilon > 0 \}$$

è una base di τ_d, ma anche

$$\mathcal{B}' := \{ B(x, \tfrac{1}{n}) \mid x \in X, \quad n \in \mathbb{N}_+ \}.$$