1. Basi

OSS 1 Se $\mathcal{B}$ è una base di (X, τ), allora

1. $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = X$

2. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in A_1 \cap A_2$, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che

$$x \in B \subset A_1 \cap A_2 .$$

Prop 1. Sia X un insieme, e sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una collezione di insiemi tale che valgano 1 e 2 dell'Oss 1. Allora esiste una (e una sola) topologia τ su X tale che $\mathcal{B}$ sia una base di τ.

La Proposizione 1 permette di <u>definire</u> una topologia attraverso la scelta di $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che valgano 1 e 2 dell'Oss 1.

Esempio 1 Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici.

Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ la collezione

$$\mathcal{B} := \{ A \times B \mid A \in \tau_X , B \in \tau_Y \}.$$

Valgono 1 e 2 sopra, quindi $\mathcal{B}$ è base di un'unica topologia τ su $X \times Y$, che si chiama topologia prodotto.

Si dice che $(X \times Y, \tau)$ è il

prodotto degli spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y)

OSS 2 Siano X, Y sp. top., e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia su Y.

Un'applicazione

$$f : X \to Y$$

è continua se e solo se $f^{-1}A$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

PROP 2 T, X, Y sp. top. e

$$T \xrightarrow{f} X \qquad T \xrightarrow{g} Y$$

applicazioni continue. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} T &\xrightarrow{\Phi} X \times Y \\ t &\longmapsto (f(t), g(t)) \end{aligned}$$

è continua.

?? Per definizione

$$\mathcal{B} = \{ A \times B \mid A \subset X \quad B \subset Y \text{ aperti} \}$$

è una base della topologia su $X \times Y$. Se $A \times B \in \mathcal{B}$, allora

$$\phi^{-1}(A \times B) = \{ t \in T \mid f(t) \in A \text{ e } g(t) \in B \} = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B),$$

che è aperto perché intersezione di aperti. Per l'Oss 2 l'applicazione ϕ è continua. $\square$

<u>DEF 1</u> Siano τ, $\mathcal{R}$ due topologie su un insieme X. Allora <u>τ è meno fine di $\mathcal{R}$</u> se $\tau \subset \mathcal{R}$. Si dice anche che <u>$\mathcal{R}$ è più fine di τ</u>.

<u>Esempio 2</u> La topologia τ_{sup} su $\mathbb{R}$ è meno fine della topologia euclidea.

<u>Esempio 3</u> La topologia τ_{inf} su $\mathbb{R}$ ha come aperti le semirette aperte illimitate a destra:

$$\tau_{inf} := \{ (a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R} \amalg \{\pm\infty\} \}.$$

τ_{sup} <u>non</u> è più fine di τ_{inf}, né meno fine.

2. Chiusura, parte interna etc.

X spazio topologico.

DEF 2 La <u>chiusura di $A \subset X$</u> è l'intersezione dei sottoinsiemi chiusi di X che contengono A:

$$\bar{A} := \bigcap_{\substack{A \subset C \subset X \\ \text{chiuso}}} C$$

OSS 3 La chiusura $\bar{A}$ è chiuso, ed è contenuto in ogni chiuso che contiene A. In particolare $\bar{A} = A$ se e solo se A è chiuso.

DEF 3 $A \subset X$ é <u>denso in X</u> se

$$\bar{A} = X$$

OSS 4 A è denso in X se e solo se ogni aperto non vuoto di X ha intersezione non vuota con A.

Esempio 4 $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ è denso.

Esempio 5 Sia τ_{sup} la top. della semicont. sup. in $\mathbb{R}$. Allora

$$\bar{\mathbb{N}} = [0, +\infty)$$

$$\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{R} \qquad (\text{cioè } \mathbb{Z} \text{ è denso in } (\mathbb{R}, \tau_{sup}))$$

DEF 3 La <u>parte interna di $B \subset X$</u> è l'unione degli aperti di X contenuti in B

$$B^\circ := \bigcup_{\substack{A \subset B \\ A \text{ aperto}}} A$$

OSS 5 La parte interna B° è aperta, ed è contiene ogni aperto contenuto in B. In particolare $B^\circ = B$ se e solo se B è aperto.

DEF 4 La <u>frontiera di $B \subset X$</u> è

$$\partial B := \bar{B} \setminus B^\circ.$$

OSS 6 $X \setminus B^\circ = \overline{X \setminus B}$, quindi

$$\partial B = \bar{B} \cap \overline{(X \setminus B)}$$

e perciò ∂B è chiuso.

DEF 5 Sia $x_0 \in X$. Un $U \subset X$ è un <u>intorno di x_0</u> se $x_0 \in U^\circ$.

NOTAZIONE $I(x_0)$ è la famiglia degli intorni di $x_0 \in X$.

PROP 3 $x_0 \in \overline{B}$ se e solo se ogni intorno di x_0 ha intersezione non vuota con B.

DEF 6 Un sistema fondamentale di intorni di $x_0 \in X$ è un $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x_0)$ t.c. per ogni $U \in \mathcal{I}(x_0)$ esiste $V \in \mathcal{J}$ con

$$V \subset U.$$

3. Sottospazi Sia X uno sp. top. e sia $Y \subset X$. La famiglia dei sottoinsiemi di Y data da

$$\{ A \cap Y \mid A \subset X \text{ aperto} \}$$

è una topologia su Y, che si chiama la topologia di sottospazio.

Esempio 6 La topologia di sottospazio su $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è quella discreta.

Esempio 7 La sfera topologica di dimensione n è

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$$

con la topologia di sottospazio (di $\mathbb{R}^{n \times n}$).