1. Sottospazi

Ricordiamo: se X è uno sp. top. e $Y \subset X$, la topologia di sottospazio su Y è quella in cui gli aperti sono

$$A \cap Y \qquad A \subset X \text{ aperto.}$$

Un sottospazio di X è un sottoinsieme $Y \subset X$ con la topologia di sottospazio.

<u>Notazione</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, per esempio $[a,b) \subset \mathbb{R}$ o $\overline{B(a,r)} \subset \mathbb{R}^n$.

Se non indichiamo esplicitamente il contrario, la topologia di A è <u>quella di sottospazio di $\mathbb{R}^n$</u>.

<u>Esempio 1</u> $X = \mathbb{R}^{n+1}$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e

$$Y = V(f) := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0 \}.$$

Notate che Y è chiuso.

<u>Esempio 2</u> Un <u>aperto</u> $Y \subset X$.

<u>Esempio 3</u> X sp. top. discreto. Se $Y \subset X$ è un sottospazio, anche Y è discreto.

<u>Esempio 4</u> $X = \mathbb{R}$

$$Y = \{0\} \cup [1,2]$$

Vogliamo capire che relazione c'è tra la topologia di X e quella di un sottospazio $Y \subset X$.

OSS 1 Sia $Y = \{0\} \cup [1,2]$ sottospazio di $\mathbb{R}$. L'insieme $A = \{0\}$, contenuto in Y, è aperto in Y ma non è aperto in $\mathbb{R}$.

PROP 1 Siano X uno sp. top. e $Y \subset X$ un sottospazio. Se $A \subset Y$, allora la chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y con la chiusura di A in X.

PROP 2 Siano X uno sp. top. e $Y \subset X$ un sottospazio.

(I) Se Y è aperto in X, allora $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se è aperto in X.

(II) Se Y è chiuso in X, allora $A \subset Y$ è chiuso in Y se e solo se è chiuso in X.

(III) Se Y è un intorno di $y_0 \in Y$, allora $A \subset Y$ è un intorno di y_0 in Y se e solo se lo è in X.

2. Immersioni.

Siano X, Y spazi topologici.

DEF 2 Un'applicazione $X \xrightarrow{f} Y$ è una immersione se è continua, iniettiva e l'applicazione

$$f(X) \xrightarrow{g} X$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } x \in X \text{ t.c. } f(x) = y$$

è continua (e quindi g è un omeomorfismo).

OSS 2 Un'applicazione iniettiva $X \xrightarrow{f} Y$ è una immersione se e solo se vale:

$A \subset X$ è aperto se e solo se $f(A)$ è aperto in $f(X)$.

Esempio 5 Sia $X \subset Y$ un sottospazio, e sia $i : X \hookrightarrow Y$ la mappa di inclusione. Allora i è (banalmente) una immersione.

Esempio 6 L'applicazione

$$(\mathbb{R}, \tau_{disc}) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x, 0)$$

è iniettiva e continua, ma non è una immersione perché esistono (molti) $A \subset (\mathbb{R}, \tau_{disc})$ aperti t.c. $f(A)$ non sia aperto in $\mathrm{Im} f = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

<u>Esempio 7</u> Sia

$$\begin{aligned} [0,2\pi) &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Allora f è continua e iniettiva ma non è una immersione. Infatti per ogni $0 < \varepsilon < 2\pi$ il segmento $[0,\varepsilon)$ è aperto in $[0,2\pi)$ ma $f([0,\varepsilon))$ non è aperto in $\mathrm{Im} f = S^1$.

Alcune immersioni sono "migliori" di altre. Prima diamo un paio di definizioni.

<u>DEF 2</u> Un'applicazione continua $X \xrightarrow{f} Y$ tra sp. top. è <u>aperta</u> se per ogni $A \subset X$ l'immagine $f(A)$ è aperta in Y.

<u>DEF 3</u> Un'applicazione continua $X \xrightarrow{f} Y$ tra sp. top. è <u>chiusa</u> se per ogni $C \subset X$ l'immagine $f(C)$ è chiusa in Y.

PROP 3 Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e iniettiva tra sp. top.

I. Se f è aperta, allora è una immersione.

II. Se f è chiusa, allora è una immersione.

3. Invarianza del dominio e curva di Peano.

Teorema dell'invarianza del dominio (Brouwer)

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ aperti non vuoti. Se esiste un omeomorfismo

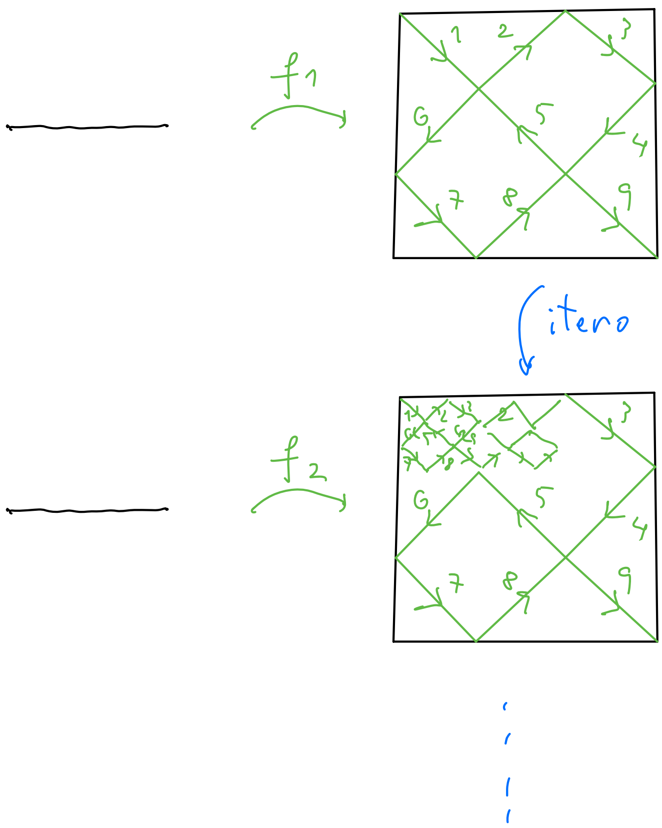
$$A \xrightarrow{f} B$$

allora $m = n$.

OSS 3 Se si assume che f è un diffeomorfismo, cioè f è C^∞ con inversa C^∞ (o anche C^1), segue facilmente che $m = n$. Con l'ipotesi molto più debole ("f continua") il risultato è poco scontato, soprattutto considerando l'esistenza di curve di Peano, cioè applicazioni continue e suriettive (!)

$$[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$$

Una tale applicazione può essere definita come il limite di una successione di applicazioni lineari a tratti f_n raffigurate sotto:



4. Spazi di Hausdorff

DEF 4 Uno sp. top. X è <u>di Hausdorff</u> (o $\underline{T2}$) se per ogni $x_1, x_2 \in X$ distinti esistono intorni $U_i \in \mathcal{I}(x_i)$ t.c.

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Esempio 8 (X, d) spazio metrico e τ_d la topologia associata. Allora (X, τ_d) è di Hausdorff. Infatti siano $x_1 \neq x_2 \in X$. Poniamo

$$d := d(x_1, x_2).$$

Allora

$$B\left(x_1, \frac{d}{2}\right) \cap B\left(x_2, \frac{d}{2}\right) = \emptyset.$$

Esempio 9 $(\mathbb{R}, \tau_{sup})$ non è di Hausdorff.

DEF 5 Uno sp. top. (X, τ) è metrizzabile se esiste una distanza d su X tale che $\tau = \tau_d$.

OSS 4 Uno sp. top. metrizzabile è di Hausdorff, ma non vale il viceversa, cioè esistono spazi topologici di Hausdorff che non sono metrizzabili. Un esempio è il seguente (vedi Es. 3.62 di Manetti). La topologia di Sorgenfrey τ_{sf} su $\mathbb{R}$ è quella con base i segmenti $[a, b)$. Allora

$$(\mathbb{R}, \tau_{sf}) \times (\mathbb{R}, \tau_{sf})$$

è di Hausdorff ma non metrizzabile.

PROP 4 Uno sp. top. X è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$$

è chiusa in $X \times X$.

COR 1 Siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue tra sp. top. Se Y è di Hausdorff, allora

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X.