1. Connessione

Indico i passi principali, seguendo [Manetti].

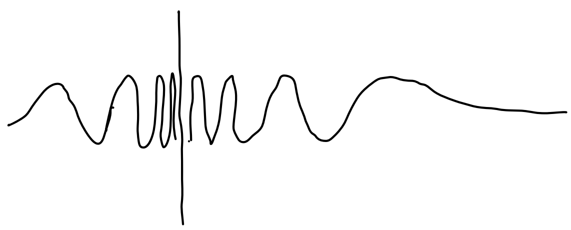
DEF 1 Uno spazio topologico X è <u>connesso</u> se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di X sono $\emptyset$ e X. Uno spazio topologico è <u>sconnesso</u> se non è connesso.

OSS 1 Uno spazio topologico X è sconnesso se e solo se è unione disgiunta di aperti (chiusi) non vuoti.

Es. 1 Gli intervalli (in $\mathbb{R}$) sono connessi.

Es. 2 Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ dato da

$$T := \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$



Allora T è connesso.

PROP 1 Sia $f: X \to Y$ continua. Se X è connesso, allora $f(X)$ è connesso.

DEF 2 Uno spazio topologico X è <u>connesso per archi</u> se per ogni $x_0, x_1 \in X$ esiste un'applicazione continua

$$[0,1] \xrightarrow{\gamma} X$$

tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

PROP 2 Se X è connesso per archi, allora è connesso.

Es. 3 Se $X \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, allora X è connesso per archi, e quindi è connesso.

OSS 2 Non è vero che se X è connesso, allora è connesso per archi. Per esempio $T \subset \mathbb{R}^2$ dell'Es. 2 è connesso ma non è connesso per archi.

Es. 4 $X \subset \mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo.

PROP 3 Siano $n > 0$ e $f : S^n \to \mathbb{R}$ continua. Esiste $x_0 \in S^n$ tale che

$$f(x_0) = f(-x_0).$$

COR 1 Siano $U \subset \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti, e

$$U \xrightarrow{f} V$$

un omeomorfismo. Allora $n = 1$.

PROP 4 Sia $X \xrightarrow{f} Y$ un'applicazione continua, suriettiva, con $f^{-1}(y)$ connesso per ogni $y \in Y$, e Y connesso.
Se f è aperta o chiusa, allora X è connesso.

COR 2 Se X e Y sono sp. top. connessi, allora $X \times Y$ è connesso.

2. Componenti connesse.

Sia X uno sp. top.

DEF 3 Un $C \subset X$ è una componente connessa di X se

(I) C è connessa, e

(II) Se $C \subset D$ e D è connessa, allora $C = D$.

Es. 5 Sia $X = (0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R}$. Allora $(0,1)$ e $(2,3)$ sono componenti connesse di X.

TEOREMA 1 Sia X uno spazio topologico. Allora X è unione disgiunta delle sue componenti connesse. Ciascuna componente connessa è chiusa.

Prima di dimostrare il Teorema 1 si dimostrano:

LEMMA 1 Siano X uno sp. top. e $x_0 \in X$. Se $Z_i \subset X$ è connesso per $i \in I$, e $x_0 \in Z_i$ per ogni $i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} Z_i$ è connesso.

LEMMA 2 Se $Y \subset X$ è connesso, allora $\bar{Y}$ è connesso.

Dim. ne del Teor. 1 Se $x_0 \in X$ sia $C(x_0) \subset X$ l'unione dei sottospazi connessi di X che contengono x_0. Allora $C(x_0)$ è connesso per il Lemma 1. Segue che $C(x_0)$ è una componente connessa di X. Se $x_0, x_1 \in X$, allora o $C(x_0) \cap C(x_1) = \emptyset$, oppure $C(x_0) = C(x_1)$, per il Lemma 1. Questo dimostra che X è unione disgiunta delle sue componenti connesse. Ciascuna compte connessa è chiusa per il Lemma 2.

OSS 3 In generale le compti connesse non sono aperte, per esempio se
$$X = \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$$
le compti connesse sono i "singoletti", ma $\{0\}$ non è aperto in X

PROP 5 Sia X uno sp. top. tale che ogni suo punto abbia un intorno connesso. Allora le compti connesse di X sono aperti.

OSS 4 Per la connessione per archi vale un risultato analogo al Teorema 1.