3. Compattezza

DEF 1 Uno spazio top. è compatto se ogni suo ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito.

OSS 1 Avete dimostrato nei corsi di Analisi che un intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è compatto. Questo risultato non verrà ridimostrato.

PROP 1 Sia $f: X \to Y$ continua. Se X è compatto, allora $f(X)$ è compatto.

DIM Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Per ogni $i \in I$ esiste un aperto $\tilde{U}_i \subset Y$ tale che

$$U_i = f(X) \cap \tilde{U}_i$$

Quindi $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\tilde{U}_i)$ è aperto e

$$X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i).$$

Siccome X è compatto esiste $J \subset I$ finito tale che

$$X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j)$$

Segue che

$$f(X) = \bigcup_{j\in J} U_j \,.$$

$\square$

PROP 2 Se X è compatto e $Y \subset X$ è chiuso, allora Y è compatto.

DIM Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Y. Per ogni $i \in I$ esiste un aperto $\tilde{U}_i \subset X$ tale che

$$U_i = Y \cap \tilde{U}_i$$

Sia $A := X \setminus Y$. Allora

$$X = A \cup \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i \qquad (*)$$

Siccome X è compatto e ciascuno degli insiemi a destra dell'uguaglianza in $(*)$ è aperto, esiste un sottoricoprimento finito. Siano $\tilde{U}_{i_1}, \dots, \tilde{U}_{i_m}$ gli aperti $\tilde{U}_i$ che appaiono in questo sottoricoprimento finito. Siccome $A \cap Y = \emptyset$,

$$Y \subset \tilde{U}_{i_1} \cup \dots \cup \tilde{U}_{i_m}$$

e perciò $Y = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$. $\square$

PROP 3 Sia X di Hausdorff. Se $Y \subset X$ è compatto, allora Y è chiuso.

DIM Sia $x_0 \in (X \setminus Y)$. Dato $y \in Y$ esistono aperti $U_y, V_y \subset X$ tali che

$$x_0 \in U_y \qquad y \in V_y \qquad U_y \cap V_y = \emptyset$$

(perché X è di Hausdorff). Quindi

$$Y \subset \bigcup_{y \in Y} V_y,$$

e siccome Y è compatto esistono $y_1, \ldots, y_m \in Y$ t.c.

$$Y \subset (V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_m}).$$

Sia $U := U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_m}$. Allora $x_0 \in U$ e

$$U \cap (V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_m}) = \emptyset.$$

In particolare $U \cap Y = \emptyset$, cioè $U \subset (X \setminus Y)$. Questo dimostra che $X \setminus Y$ è unione di aperti, e quindi è aperto. $\square$

<u>OSS 2</u> Siccome $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff, questo dimostra che un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso. Inoltre un semplice argomento (che avete visto) mostra che K è limitato. Per vedere che vale il viceversa basta sapere che ogni "rettangolo chiuso" $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ è compatto. Per $n = 2$, visto, per $n \geq 2$ segue (volendo) da un risultato più generale (Prop. 4).

OSS 3 Sia X compatto, e sia

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

continua. Allora $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto per la Prop. 1, e quindi $f(X)$ è un intervallo chiuso e limitato (OSS 2). Segue che f ha massimo e minimo.

Prop. 4 Se X e Y sono compatti, allora $X \times Y$ è compatto.

DIM Siccome ogni aperto di $X \times Y$ è unione di aperti $A \times B$, dove $A \subset X$ e $B \subset Y$ sono aperti, è sufficiente considerare ricoprimenti aperti di $X \times Y$ composti di "rettangoli".

$$X \times Y = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \qquad A_i \subset X \text{ e } B_i \subset Y \text{ aperti.}$$

Dimostriamo che esiste un sottoricoprimento aperto. Per $y_0 \in Y$ $X \times \{y_0\}$ è compatto perché è omeomorfo a X, e quindi esiste $J(y_0) \subset I$ finito tale che

$$X \times \{y_0\} \subset \bigcup_{j \in J(y_0)} A_j \times B_j$$

Sia $V(y_0) := \bigcap_{j \in J(y_0)} B_j \subset Y$. Notate che $\forall y \in V(y_0)$

$$X \times \{y\} \subset \bigcup_{j \in J(y_0)} A_j \times V(y_0) \subset \bigcup_{j \in J(y_0)} A_j \times B_j \qquad (*)$$

Il ricoprimento aperto $\{V(y)\}_{y \in Y}$ di Y ha un sottoricoprimento finito perché Y è compatto. Sia $H \subset Y$ finito tale che

$$Y = \bigcup_{y \in H} V(y). \qquad (**)$$

Allora per $(*)$ e $(**)$ si ha

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{j \in J(y) \\ y \in H}} A_j \times B_j .$$

$\square$

In modo simile si dimostra

Prop. 5 Se X è compatto e Y è uno sp. top., la proiezione

$$X \times Y \to Y$$

è un'applicazione chiusa.

OSS 4 Come già osservato, dalla Prop. 4 segue che $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Abbiamo già visto il "solo se". "Se": $K \subset [-A,A]^n$ per qualche $A>0$ (perché K è limitato), e K è chiuso in $[-A,A]^n$ per ipotesi. Per la Prop 4 $[-A,A]^n$ è compatto (infatti $[-A,A]$ è compatto, quindi lo è anche $[-A,A]^2$, quindi anche $[-A,A]^2 \times [-A,A] \cong [-A,A]^3$, etc.)

PROP 6 Sia $f: X \to Y$ continua. Se X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è chiusa. Se, in aggiunta, f è bigettiva, allora f è un omeomorfismo.

DIM Sia $K \subset X$ chiuso. Siccome X è compatto, K è compatto e quindi $f(K) \subset Y$ è compatto. Siccome Y è di Hausdorff, segue che $f(K)$ è chiuso. $\square$

2. Gruppi topologici

DEF 2 Un gruppo topologico è un gruppo G con una topologia tale che le applicazioni

$$G \times G \to G \qquad \text{e} \qquad G \to G$$
$$(g,h) \mapsto g \cdot h \qquad\qquad g \mapsto g^{-1}$$

siano continue.

DEF 3 Un omomorfismo tra gruppi topologici G_1, G_2 è un omomorfismo di gruppi

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2$$

che è anche continuo. Un isomorfismo tra gruppi topologici è un isomorfismo di gruppi che è anche un omeomorfismo di sp. top.

Esempio 1 Se G è un gruppo, la topologia discreta τ_{discr} dà a G una struttura di gruppo discreto.

Esempio 2 $\mathbb{R}$ gruppo additivo con la topologia euclidea.

Esempio 3 $\mathbb{R}_{>0}$ gruppo moltiplicativo con la topologia euclidea. L'applicazione esponenziale

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi topologici.

Esempio 4 Se G_1, G_2 sono gruppi topologici, allora il prodotto diretto $G_1 \times G_2$ con la topologia prodotto è un gruppo topologico.
Per esempio $\mathbb{R}^n$.

OSS 5 Sia G un gruppo topologico. Se $g_0 \in G$, allora l'applicazione

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g \cdot g_0 \end{aligned}$$

è un omeomorfismo (non è un isomorfismo di gruppi se $g_0 \neq 1$).

3. Esempi (classici) di gruppi topologici

$GL(n,\mathbb{R}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$

$GL^+(n,\mathbb{R}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \}$

$SL(n,\mathbb{R}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$

$O(n,\mathbb{R}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = 1_n \}$

$SO(n,\mathbb{R}) := O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R})$

$GL(n,\mathbb{C}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \}$

$SL(n,\mathbb{C}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$

$U(n,\mathbb{C}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} \cdot A = 1_n \}$

$SU(n,\mathbb{C}) := U(n,\mathbb{C}) \cap SL(n,\mathbb{C})$

L'operazione di gruppo è quella data dalla moltiplicazione (righe per colonne) di matrici.

La topologia è quella di sottospazio di

$M_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ nei primi 5 casi, e quella di sottospazio di $M_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ nei casi rimanenti.

PROP 7 $GL^+(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ sono connessi.

(Schizzo di) DIM Per induzione su n. Facciamo il caso $GL^+(n, \mathbb{R})$. Si ha che

$$GL^+(1, \mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

quindi $GL^+(1, \mathbb{R})$ è connesso. Passo induttivo, quindi $n \geq 2$, e assumiamo che $GL^+(n-1, \mathbb{R})$ sia connesso. L'applicazione

$$\begin{aligned} GL^+(n, \mathbb{R}) &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \\ A &\longmapsto 1^a \text{ colonna di } A \end{aligned}$$

è continua e aperta, e

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

che è connesso perché $n \geq 2$. Se $y \in \mathrm{Im}(f)$, la fibra $f^{-1}(y)$ è omeomorfa a

$$\underbrace{\mathbb{R}^{n-2}}_{\text{connesso}} \times \underbrace{GL^+(n-1, \mathbb{R})}_{\text{connesso per ipotesi induttiva}}$$

e quindi è connessa. Per un risultato che abbiamo dimostrato, segue che $GL^+(n, \mathbb{R})$ è connesso. $\square$

COR 1 La decomposizione in componenti connesse di $GL(n, \mathbb{R})$ è

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \amalg GL^-(n, \mathbb{R}),$$

dove

$$GL^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}.$$

COR 2 $SL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{C})$ sono connessi

PROP 8 $SO(n, \mathbb{R})$, $U(n, \mathbb{C})$ e $SU(n, \mathbb{C})$ sono connessi e compatti.