1. Varietà topologiche

DEF 1 Uno spazio topologico X (non vuoto) è una <u>varietà topologica di dimensione n</u> se:

A. X è di Hausdorff.

B. Ogni $x_0 \in X$ ha un intorno aperto omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$.

OSS 1 Alcune volte, nella definizione di varietà topologica di dimensione n, si aggiunge la condizione

C. Ogni componente connessa di X ha una base numerabile.

Nei nostri esempi la condizione C è soddisfatta.

OSS 2 Una varietà topologica di dimensione n non può essere omeomorfa a una varietà topologica di dimensione m se $m \neq n$ per il (non banale) Teorema dell'invarianza del dominio. Quindi l'"n" della definizione è un attributo della varietà. Siccome non dimostreremo Teorema dell'invarianza del dominio (abbiamo dimostrato che vale se $m=2$ (o $n=1$), e dimostreremo che vale se $m=2$ (o $n=2$)), continueremo a considerare varietà topologica di dimensione n come un blocco unico (cioè non eliminiamo "n").

2. Esempi

Es. 1 $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dimensione n.

Es. 2 S^n è una varietà topologica di dimensione n. Infatti S^n è di Hausdorff perché un sottospazio dello spazio topologico di Hausdorff $\mathbb{R}^{n+1}$. Inoltre

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} S^n_i(+) \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} S^n_i(-)$$

dove $S^n_i(\pm)$ sono i sottoinsiemi aperti

$$S^n_i(+) := \{ x \in S^n \mid x_i > 0 \}, \quad S^n_i(-) := \{ x \in S^n \mid x_i < 0 \}.$$

L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} S^n_{n+1}(+) & \xrightarrow{f} & B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

è continua con inversa data da

$$\begin{array}{ccc} B(0,1) & \xrightarrow{f} & S^n_{n+1}(+) \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}) \end{array}$$

e quindi è un omeomorfismo. In modo simile si vede che ciascun $S^n_i(\pm)$ è omeomorfo alla palla aperta $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Quindi vale B della Def 1.

Es. 3 Un intervallo chiuso $[a,b] \subset \mathbb{R}$ non è una varietà topologica di dimensione n, qualsiasi sia n.

Infatti sappiamo che se lo fosse, allora n dovrebbe essere 1 (abbiamo dimostrato che un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ se $n>1$). Per mostrare che $[a,b]$ non è una varietà topologica di dimensione 1, consideriamo il sistema fondamentale di intorni di $a \in [a,b]$ dato da

$$\mathcal{U} := \{ [a, a+\tfrac{1}{n}) \cap [a,b] \mid n \in \mathbb{N}_+ \}.$$

$\mathcal{U}$ ha la seguente proprietà:

Per ogni $A \in \mathcal{U}$ il sottospazio $A \setminus \{a\}$ è connesso. (*)

Si verifica facilmente che se X è una varietà topologica di dimensione 1 e $x_0 \in X$, non esiste un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}$ di x_0 con la proprietà che per ogni $B \in \mathcal{V}$ il sottospazio $B \setminus \{x_0\}$ è connesso.

Questo dimostra che $[a,b]$ non è una varietà topologica di dimensione 1.

Es. 4 Questa è una generalizzazione dell'Es. 2. Sia

$$\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

una funzione C^∞ (o anche C^1), e supponiamo che

i) $V(f) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}$ non è vuoto,

ii) per ogni $a \in V(f)$ esiste $i \in \{1, \dots, n+1\}$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0.$$

Allora $V(f)$ è una varietà topologica di dimensione n.

Infatti $V(f)$ è di Hausdorff perché è un sottospazio dello spazio topologico di Hausdorff $\mathbb{R}^{n+1}$, e per dimostrare che vale B della definizione procediamo come segue.

Sia $a \in V(f)$. Per il Teorema della funzione implicita esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, una funzione C^∞

$$U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

e un aperto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tali che

$$a \in \Gamma_\varphi, \quad V \cap V(f) = \Gamma_f.$$

Siccome Γ_f è omeomorfo all'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, segue che $V(f)$ è una varietà topologica di dimensione n.

3. Spazi proiettivi.

Mostreremo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono rispettivamente una varietà topologica di dimensione n e una varietà topologica di dimensione $2n$.

Prima diamo una procedura che permette di costruire spazi topologici incollando spazi topologici già noti.

PROP 1 Sia X un insieme, e sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una collezione di sottoinsiemi di X tale che

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

Per ogni $i\in I$ sia τ_i una topologia su X_i. Sia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ la collezione di sottoinsiemi $A\subset X$ tali che

$$A\cap X_i \in \tau_i \qquad \forall i\in I.$$

Allora τ è una topologia su X.

OSS 3 Supponiamo che $\forall i,j\in I$

$X_i\cap X_j$ è aperto in (X_i,τ_i) e (X_j,τ_j), e la top. su $X_i\cap X_j$ di sottospazio di X_i è uguale a quella di sottospazio di X_j $(\star)$

Allora ciascun X_i è aperto in X, e inoltre la topologia τ_i è uguale alla topologia di sottospazio di X_i.

DEF 2 Se vale (*) diciamo che (X,τ) è ottenuto incollando gli spazi topologici (X_i,τ_i).

Es. 5 Se X già ha una topologia, e ciascun $X_i \subset X$ è aperto, allora la topologia ottenuta incollando le topologie τ_i di sottospazio su X_i è uguale alla topologia (di partenza) su X.

Usiamo questa costruzione per definire una topologia su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Poniamo $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$.

Ricordiamo che se $i \in \{0,\dots,n\}$ il sottoinsieme

$$\mathbb{P}^n(K)_{x_i} := \{[x] \in \mathbb{P}^n(K) \mid x_i \neq 0\}$$

viene identificato con K^n attraverso l'applicazione biunivoca

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(K)_{x_i} \\ (t_1,\dots,t_n) & \longmapsto & [t_1,\dots,t_i,1,t_{i+1},\dots,t_n] \end{array}$$

posizione i (il "primo posto" è nella "posizione 0")

Più in generale, se

$$K^{n+1} \xrightarrow{L} K$$

è una funzione lineare non nulla, e

$$\mathbb{P}^n(K)_L := \{[X] \in \mathbb{P}^n(K) \mid L(X) \neq 0\},$$

possiamo definire un'applicazione biunivoca

$$K^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)_L$$

come segue. Scegliamo $v_0 \in K^{n+1}$ tale che

$$L(v_0) \neq 0,$$

e sia $\varphi : K^n \to \mathbb{P}^n(K)_L$ la composizione

Isomorfismo di K spazi vettoriali.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\sim"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \ker(L) \arrow[r] & \mathbb{P}^n(K)_L \\ & v \arrow[r, mapsto] & {[v_0 + v]}. \end{tikzcd}$$

L'applicazione φ è biunivoca. Notate che φ dipende dalla scelta di v_0 e dell'isomorfismo $K^n \xrightarrow{\sim} \ker(L)$. Quando si cambiano e si ottiene un'altra $\psi : K^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)_L$ (biunivoca), allora esiste un isomorfismo di spazi affini

$$K^n \xrightarrow[\sim]{\alpha} K^n$$

tale che $\psi = \varphi \circ \alpha$. Per questo motivo possiamo definire la topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(K)_L$ come segue: $A \subset \mathbb{P}^n(K)_L$ è aperto se $\varphi^{-1}(A) \subset K^n$ è aperto per la topologia euclidea su

$$K^n = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se } K = \mathbb{R} \\ \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} & \text{se } K = \mathbb{C}. \end{cases}$$

DEF 2 La topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è quella in cui $A \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è aperto se e solo se $A \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L$ è aperto (per la topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L$) per ogni funzioni lineare non nulla $L : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$.