PROP 1 Siano $L, H : K^{n+1} \to K$ funzioni lineari non nulle. Allora

(1) $\mathbb{P}^n(K)_L \cap \mathbb{P}^n(K)_H$ è aperto in $\mathbb{P}^n(K)_L$ (e in $\mathbb{P}^n(K)_H$).

(2) Le topologie su $\mathbb{P}^n(K)_L \cap \mathbb{P}^n(K)_H$ di sottospazio di $\mathbb{P}^n(K)_L$ e $\mathbb{P}^n(K)_H$ sono uguali.

(In altre parole vale la condizione $(\star)$ a p. 5 della Lezione 28/03)

DIM Se L e H sono linearmente dipendenti, allora $\mathbb{P}^n(K)_L = \mathbb{P}^n(K)_H$, e il risultato è banalmente vero.

Se L e H sono linearmente indipendenti, possiamo supporre che $L = X_0$ e $H = X_1$ (a rigore questo può significare due cose: in generale i conti sono simili a quelli nel caso $L = X_0$ e $H = X_1$, oppure ci si può ridurre a questo caso perché le proiettività sono omeomorfismi per la topologia euclidea). Per dimostrare quello che vogliamo, dobbiamo scegliere le identificazioni $K^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n(K)_{X_0}$ e $K^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n(K)_{X_1}$. Poniamo

$$\begin{aligned} \alpha : K^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n(K)_{X_0} \\ (s_1, \dots, s_n) &\longmapsto [1, s_1, \dots, s_n] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta : K^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n(K)_{X_1} \\ (t_0, t_2, \dots, t_n) &\longmapsto [t_0, 1, t_2, \dots, t_n] \end{aligned}$$

Att.ne agli indici!

Allora

$$\alpha^{-1}\left(\mathbb{P}^n(K)_{X_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{X_1}\right) = \{ s \in K^n \mid s_1 \neq 0 \},$$

e perciò $\mathbb{P}^n(K)_{x_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{x_1}$ è aperto in $\mathbb{P}^n(K)_{x_0}$.

Siccome

$$\beta^{-1}\left(\mathbb{P}^n(K)_{x_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{x_1}\right) = \{t \in K^n \mid t_0 \neq 0\},$$

$\mathbb{P}^n(K)_{x_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{x_1}$ è aperto anche in $\mathbb{P}^n(K)_{x_1}$.

Abbiamo dimostrato che vale (1).

Per dimostrare che vale (2) consideriamo la composizione γ

$$\underbrace{\alpha^{-1}\left(\mathbb{P}^n(K)_{x_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{x_1}\right)}_{\substack{\parallel \\ \{s \in K^n \mid s_1 \neq 0\}}} \xrightarrow{\alpha|\ldots} \mathbb{P}^n(K)_{x_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{x_1} \xrightarrow{(\beta|\ldots)^{-1}} \underbrace{\beta^{-1}\left(\mathbb{P}^n(K)_{x_0} \cap \mathbb{P}^n(K)_{x_1}\right)}_{\substack{\parallel \\ \{t \in K^n \mid t_0 \neq 0\}}}$$

$$s \longmapsto \left(\underset{\substack{\parallel \\ t_0}}{\frac{1}{s_1}}, \underset{\substack{\parallel \\ t_2}}{\frac{s_2}{s_1}}, \ldots, \underset{\substack{\parallel \\ t_n}}{\frac{s_n}{s_1}}\right)$$

Siccome γ è continua con inversa continua (cioè γ è un omeomorfismo), vale (2). $\square$

Per la Prop. 2 la topologia euclidea in $\mathbb{P}^n(K)$ è ottenuta incollando le topologie euclidee sui sottoinsiemi $\mathbb{P}^n(K)_L$, dove L varia nella famiglia delle funzioni lineari $L: K^{n+1} \to K$ non nulle.

PROP 2 $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con la topologia euclidea è una varietà topologica di dimensione n se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e di dimensione $2n$ se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

DIM Dimostriamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è di Hausdorff. Siano

$$[X] \neq [Y] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}).$$

Esiste una funzione lineare $L: \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ tale che

$$L(X) \neq 0 \neq L(Y),$$

cioè $[X], [Y] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L$. Siccome $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e a $\mathbb{R}^{2n}$ se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, è di Hausdorff, e perciò esistono aperti $U, V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L$ t.c.

$$[X] \in U, \quad [Y] \in V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

La topologia di sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è quella euclidea e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})_L$ è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (vedi l'Oss. 3). Segue che U, V

sono aperti in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Questo dimostra che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è di Hausdorff. Siccome $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e a $\mathbb{R}^{2n}$ se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, segue la proposizione. $\square$

OSS 1 Sia $A \subset \mathbb{P}^n(K)$. Se per ogni $i \in \{0, -, n\}$ l'intersezione

$$A \cap \mathbb{P}^n(K)_{X_i}$$

è aperta (per la topologia euclidea di $\mathbb{P}^n(K)_{X_i}$), allora A è aperto. Infatti, siccome $\mathbb{P}^n(K)_{X_i} \cap \mathbb{P}^n(K)_L$ è aperto in $\mathbb{P}^n(K)_L$ per ogni $L : K^{n+1} \to K$ lineare (non nulla), segue che $A \cap \mathbb{P}^n(K)_{X_i}$ è aperto in $\mathbb{P}^n(K)$ per ogni $i \in \{0, -, n\}$, e siccome

$$A = \bigcup_{i=0}^{n} A \cap \mathbb{P}^n(K)_{X_i}$$

A è aperto (in $\mathbb{P}^n(K)$).

I motivi per introdurre i sottoinsiemi $\mathbb{P}^n(K)_L$ più generali sono due. Primo, in questo modo è evidente che la topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(K)$ non dipende dalla scelta di una base di $(K^{n+1})^\vee$, e inoltre serve per dimostrare che $\mathbb{P}^n(K)$ è di Hausdorff.

OSS 2 Sia Y uno spazio topologico, e sia

$$\mathbb{P}^n(K) \xrightarrow{f} Y$$

un'applicazione. Allora f è continua se e solo se per ogni $0 \neq L \in (\mathbb{K}^{n+1})^\vee$ la restrizione di f a $\mathbb{P}^n(K)_L$ è continua.

Per l'Oss 4 è sufficiente che la restrizione di f a $\mathbb{P}^n(K)_{X_i}$ sia continua per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Analogamente, sia X uno spazio topologico, e sia

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{P}^n(K)$$

un'applicazione. Allora g è continua se e solo se per ogni $0 \neq L \in (\mathbb{K}^{n+1})^\vee$ $g^{-1}(\mathbb{P}^n(K)_L)$ è aperto in X e la "restrizione"

$$g^{-1}(\mathbb{P}^n(K)_L) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)_L \qquad (\circ)$$

è continua. Per l'Oss 4 è sufficiente che $(\circ)$ sia continua per $L = X_0, \ldots, X_n$.

PROP 3 Sia $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Allora $\mathbb{P}^n(K)$ è connesso e compatto.

DIM Siccome $\mathbb{P}^0(K)$ è un singoletto, possiamo supporre che $n > 0$. Sia

$$\begin{aligned} S^n &\xrightarrow{f} \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

L'applicazione f è continua. Infatti sia $i \in \{0, \dots, n\}$. Allora

$$f^{-1}\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})_{x_i}\right) = \{x \in S^n \mid x_i \neq 0\}$$

è aperto in S^n, e la "restrizione"

$$\begin{aligned} \{x \in S^n \mid x_i \neq 0\} = f^{-1}\left(\mathbb{P}^n(K)_{x_i}\right) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)_{x_i} &\xrightarrow{\sim} K^n \\ [x] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{aligned}$$

è data da

$$x \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

e quindi è continua. Per l'Oss 5 l'applicazione f è continua.

Siccome f è suriettiva e S^n è connesso ($n > 0$) e compatto, segue che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso e compatto.

Per dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è connesso e compatto si procede in modo analogo. Prima notiamo l'identificazione

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1 \right\} = S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$$

Si dimostra che l'applicazione

$$\begin{aligned} S^{2n+1} &\xrightarrow{\ g\ } \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

è continua.

Siccome g è suriettiva, e S^{2n+1} è connesso compatto, segue che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è connesso e compatto. $\square$

PROP 4 Le componenti connesse di una varietà topologica di dimensione n sono aperte, e quindi sono varietà topologiche di dimensione n.

DIM Sia X una varietà topologica di dimensione n e sia $x_0 \in X$. Esiste un aperto $U \subset X$ contenente x_0 e omeomorfo a un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$. Sia

$$\begin{tikzcd} \varphi: U \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=-90] & V \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=-90] \\ X & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

un omeomorfismo. Esiste $r > 0$ t.c. $B_r(\varphi(x_0)) \subset V$.

Quindi $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x_0)))$ è un aperto di U, quindi aperto in X, contiene x_0 ed è connesso (è omeomorfo alla palla $B_r(\varphi(x_0))$, che è connessa).

Perciò $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x_0)))$ è contenuto nella componente connessa contenente x_0. Segue che le componenti connesse di X sono aperte. Sono varietà topologiche di dimensione n perché un aperto (non vuoto) in una varietà topologica di dimensione n è una varietà topologica di dimensione n. $\square$

PROP 5 Se X, Y sono varietà topologiche di dimensioni m e n, allora $X \times Y$ è una varietà topologica di dimensione $m+n$.

DIM Segue dal fatto che $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ sono aperti non vuoti, allora $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ è un aperto non vuoto (e dal fatto che il prodotto di sp. di Hausdorff è di Hausdorff, e che il prodotto di sp. top. con basi numerabili è a base numerabile). $\square$