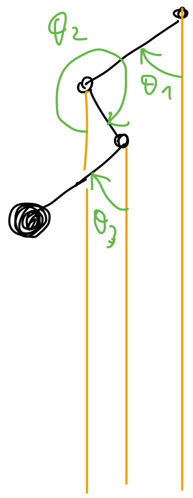
1. Perché le varietà topologiche?

- I possibili stati di un sistema in Fisica sono spesso i punti di una varietà topologica.

Esempio: Un (pluri) pendolo:



$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in T^3$$

- Se vogliamo studiare integrali impropri che vanno al di là di quello che si fa nei primi anni del corso di laurea, per esempio

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

consideremo il sottospazio $Z \subset \mathbb{C}^2$ dato da

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 1 - x^4\},$$

e Z è omeomorfo a

$$T^2 \setminus (2 \text{ p.ti}).$$

2. Varietà topologiche a meno di omeomorfismo

Il Problema. Quali sono le varietà topologiche di dimensione n a meno di omeomorfismo? Siccome le componenti connesse sono var. top ~~di~~ di dim. n, possiamo limitarci a varietà connesse.

Soluzione ideale. Produrre una lista $\{X_i\}_{i\in I}$ di var. top (connesse) di dim. n con la proprietà: se X è una var. top connessa di dim. n, allora esiste uno e un solo $i_0 \in I$ tale che X sia omeomorfo a X_{i_0} (si vorrebbe anche un algoritmo che permetta di decidere quale sia i_0).

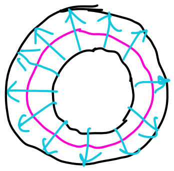
$\boxed{n=1}$ La lista è: $\mathbb{R}$, S^1 (non difficile).

$\boxed{n=2}$ Aggiungiamo la condizione "X compatta".

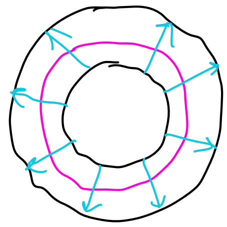
Abbiamo

$$S^2, \quad \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \qquad \text{(a due a due non omeomorfi)}$$

Costruiamo altre var. top. di dim. 2 con l'operazione di somma connessa di X e Y (var. top. di dim. 2)

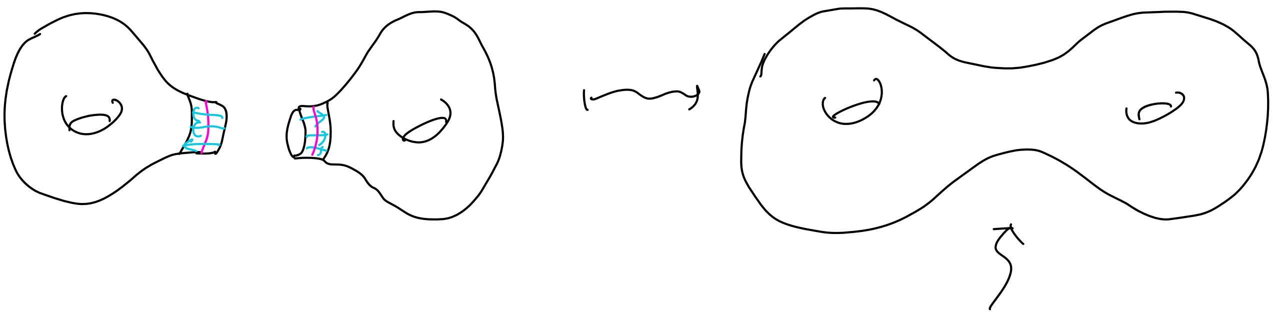


incolliamo



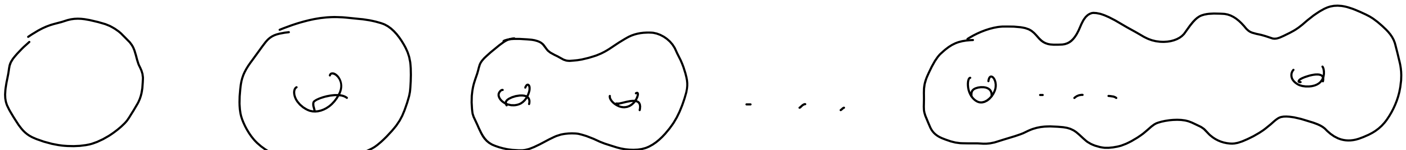
e otteniamo la somma connessa $X \# Y$.

Esempio



$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}$

La lista (var. top. connesse compatte di dim. 2):



S^2 $\quad$ $\mathbb{T}^2$ $\quad$ $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ $\quad \dots \quad$ $\underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g}$

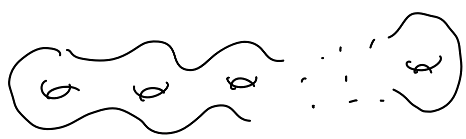
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\quad \dots \quad$ $\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{g}$

Risultato che risale a più di un secolo fa.

$\boxed{n \geq 3}$ Il problema diventa mooolto più complesso.
Esempio di complessità: la congettura di Poincaré, che riguarda le var. top. di dim. 3, è stata dimostrata circa 20 anni fa (Perelman).

3. Varietà topologiche in $\mathbb{R}^N$

TEOREMA (non difficile) Se X è una var. top. connessa di dim n, allora X è omeomorfa a un sottospazio di $\mathbb{R}^N$ (per un qualche N).

Esempio: $\underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{g} \cong$  $\subset \mathbb{R}^3$
(g "buchi")

ma $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è omeomorfo a un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (ma a un sottospazio di $\mathbb{R}^4$).