1. Proprietà di numerabilità

DEF 1 Uno spazio topologico X soddisfa il primo assioma di numerabilità (si dice anche che X è primo-numerabile) se ogni $x_0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

ES 1 La topologia di uno spazio metrico (X, d) è primo numerabile. Infatti se $x_0 \in X$, allora

$$\left\{ B\left(x_0, \frac{1}{2^n}\right) \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile.

ES 2 Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ definita così:

$$x \sim y \text{ se } x = y \text{ oppure } x, y \in \mathbb{N}.$$

Sia X lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}/\sim$. Allora X non è primo numerabile. Infatti sia $x_0 = \mathbb{N} \in X$, e sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di intorni di x_0.

Sia $\pi : \mathbb{R} \to X$ l'applicazione quoziente, e per $n \in \mathbb{N}$ sia

$$\tilde{U}_n := \pi^{-1}(U_n).$$

Allora $\tilde{U}_n$ contiene $\mathbb{N}$ e, per definizione di topologia quoziente, dato $n \in \mathbb{N}$ esiste $\delta_n > 0$ tale che

$$(n - \delta_n, n + \delta_n) \subset \tilde{U}_n . \qquad (*)$$

Per $n \in \mathbb{N}$ sia

$$0 < \varepsilon_n < \min\left\{\frac{1}{2}, \delta_n\right\}$$

Sia

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(n - \frac{\delta_n}{2}, n + \frac{\delta_n}{2}\right) \quad :$$

Allora A è aperto, è unione di classi di $\sim$ equivalenza, e contiene $\mathbb{N}$. Quindi $\pi(A)$ è aperto in X e contiene x_0.

Se $n \in \mathbb{N}$, allora U_n non è contenuto in $\pi(A)$ per $(*)$.

Quindi $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è un sistema fondamentale di intorni di x_0.

OSS 1 Se X è primo-numerabile, allora ogni sottospazio $Y \subset X$ è primo-numerabile. In particolare ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è primo-numerabile.

DEF 2 Uno spazio topologico X soddisfa il <u>secondo assioma di numerabilità</u> se ha una base numerabile.

ES 3 $\mathbb{R}^n$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità (già notato).

OSS 2 Se X è a base numerabile, allora ogni sottospazio $Y \subset X$ ha una base numerabile. In particolare ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile.

OSS 3 Se X soddisfa il secondo assioma di numerabilità, allora soddisfa primo assioma di numerabilità. Quindi lo spazio topologico $X = \mathbb{R}/\sim$

dell'Es. 2 non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

DEF 3 Uno spazio topologico X è separabile se ha un insieme denso numerabile.

OSS 3 Se X soddisfa il secondo assioma di numerabilità, allora X è separabile. Infatti se $\mathcal{B} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base numerabile di X, e $x_n \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in X.

PROP 1 Uno spazio metrico separabile soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

DIM Sia (X,d) uno spazio metrico separabile, e sia $D \subset X$ un sottoinsieme denso numerabile. Allora

$$\mathcal{B} = \{ B(x, \tfrac{1}{n}) \mid x \in D, \ n \in \mathbb{N}_+\}$$

è una base numerabile. $\square$

ES 4 La retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_{Sf}$ è separabile (e primo numerabile) ma non ha una base numerabile. Infatti $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}_{Sf}$, quindi $\mathbb{R}_{Sf}$ è separabile. Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}_{Sf}$. Se $x \in \mathbb{R}$, allora $[x, +\infty)$ è aperto per $\mathbb{R}_{Sf}$, quindi esiste $U(x) \in \mathcal{B}$ tale che

$$x \in U(x) \subset [x, +\infty) \qquad (*)$$

Sia

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \\ x &\longmapsto U(x) \end{aligned}$$

Per $(*)$ l'applicazione φ è iniettiva, e perciò $\mathcal{B}$ non è numerabile.

Notate che, per la Prop. 1, segue che $\mathbb{R}_{Sf}$ non è metrizzabile.

2. Successioni

Sia X uno spazio topologico, e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di X. Abbiamo già definito cosa significa che

$$x_n \to x \quad \text{per} \quad n\to\infty. \qquad (\circledast)$$

OSS 4 Sia X di Hausdorff. Se

$$x_n \to x \text{ per } n\to\infty \quad e \quad x_n \to y \text{ per } n\to\infty,$$

allora $x=y$. Per questo motivo, se X è di Hausdorff, scriviamo $(\circledast)$ anche

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

DEF 3 $x\in X$ è punto di accumulazione della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni intorno U di x l'insieme

$$\{i\in\mathbb{N} \mid x_i\in U\}$$

è infinito.

OSS 5 Se $x_n\to x$, allora x è punto di accumulazione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ma non vale il viceversa.

PROP 2 Sia X uno sp. top. primo-numerabile. Siano $A \subset X$ e $x \in X$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Esiste successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$x_n \to x$$

2. $x \in \bar{A}$.

DIM $(1) \Rightarrow (2)$ anche senza l'ipotesi "X primo numerabile".

Siccome X è primo numerabile esiste un sistema fondamentale di intorni di x $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$U_{i+1} \subset U_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \qquad (+)$$

Da questo segue che $(2) \Rightarrow (1)$. $\square$

PROP 3 Se X è uno sp. top. compatto ogni successione ha un punto di accumulazione.

DIM Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X. Per $m \in \mathbb{N}$ sia

$$C_m := \overline{\{x_n \mid n \geq m\}}$$

La catena di chiusi non vuoti

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_m \supset C_{m+1}$$

ha intersezione non vuota perché X è compatto.

Sia $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} C_m$. Allora x è punto di accumulazione di $\{x_n\}$ $\square$

DEF 4 Uno sp. top. è <u>compatto per successioni</u> se ogni successione ha una sottosuccessione convergente.

PROP 4 Uno sp. top. X primo-numerabile è compatto per successioni se e solo se ogni successioni ha punti di accumulazione.

DIM Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione ed esiste una sottosuccessione $\{x_{k(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (qui $\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N}$ è strettamente crescente) t.c. $x_{k(n)} \to x$, allora x è punto di accumulazione di $\{x_n\}$. (Qui non si usa l'ipotesi "X primo numerabile") Il viceversa segue dall'esistenza di un sistema fondamentale di intorni di x $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che valga $(+)$ a p.5. $\square$

COR 1 Se X è uno sp. top. compatto e primo numerabile, allora X è compatto per successioni.

DIM Segue dalle Prop. 3 e 4. $\square$

PROP 5 Sia X uno sp. top. a base numerabile. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. X è compatto.
2. X è compatto per successioni.

DIM (1) $\Rightarrow$ (2): siccome X è primo numerabile, l'implicazione segue dal Cor. 1.

(2) $\Rightarrow$ (1): supponiamo che X non sia compatto e dimostriamo che esiste una successione che non ha sottosuccessioni convergenti. Siccome X è a base numerabile e non compatto, esiste un ricoprimento aperto numerabile

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

che non ha sottoricoprimenti finiti. Quindi per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste

$$x_N \notin \bigcup_{n=0}^{N} A_n$$

La successione $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti. $\square$