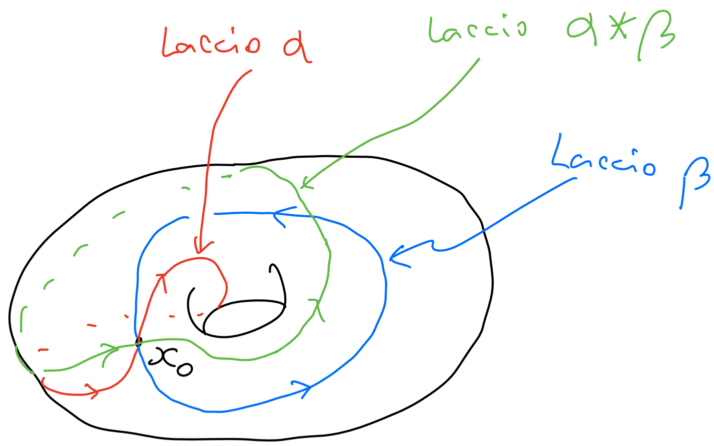
# 1. Introduzione

In topologia algebrica si associano gruppi, anelli etc. a spazi topologici in modo che la classe di isomorfismo dell'oggetto algebrico rifletta, in una certa misura, la classe di omeomorfismo (o la classe di omotopia) dello spazio topologico.

Un pre-esempio di questo è l'insieme delle componenti connesse di uno spazio topologico. In questo caso non abbiamo un oggetto algebrico ma un semplice insieme.

Il gruppo fondamentale è un primo esempio di oggetto algebrico associato a uno spazio topologico $X$. Scegliamo $x_0 \in X$. Si considerano i "lacci" in $X$ che iniziano e finiscono in $x_0$, identificando due lacci se il primo può essere deformato con continuità nel secondo. L'operazione di gruppo è data dalla "concatenazione" di lacci.




Referenze: A. Hatcher "Algebraic Topology", Capitolo 1
M. Manetti "Topologia", Capitoli 11-14.

## 2. Omotopia di cammini.

$X$ spazio topologico. $\quad I=[0,1]$

DEF 1

Un cammino in $X$ da $a \in X$ a $b \in X$ è un'applicazione continua

$$I=[0,1] \xrightarrow{f} X$$

DEF 2

Siano $g, h$ cammini in $X$ con gli stessi punti iniziali e finali, cioè tali che

$$g(0)=h(0)=a, \qquad g(1)=h(1)=b.$$

Una omotopia (relativa a $\{0,1\}$) tra $g$ e $h$ è un'applicazione continua

$$I \times I \xrightarrow{F} X$$

tale che

1. $F(s,0)=g(s) \quad \forall s \in I$
2. $F(s,1)=h(s) \quad \forall s \in I$
3. $F(0,t)=a \quad \forall t \in I$
4. $F(1,t)=b \quad \forall t \in I$

Poniamo

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{f_t} X \\ s &\longmapsto F(s,t) \end{aligned} \qquad t \in [0,1)$$

Quindi 1, 2, 3, 4 equivalgono a

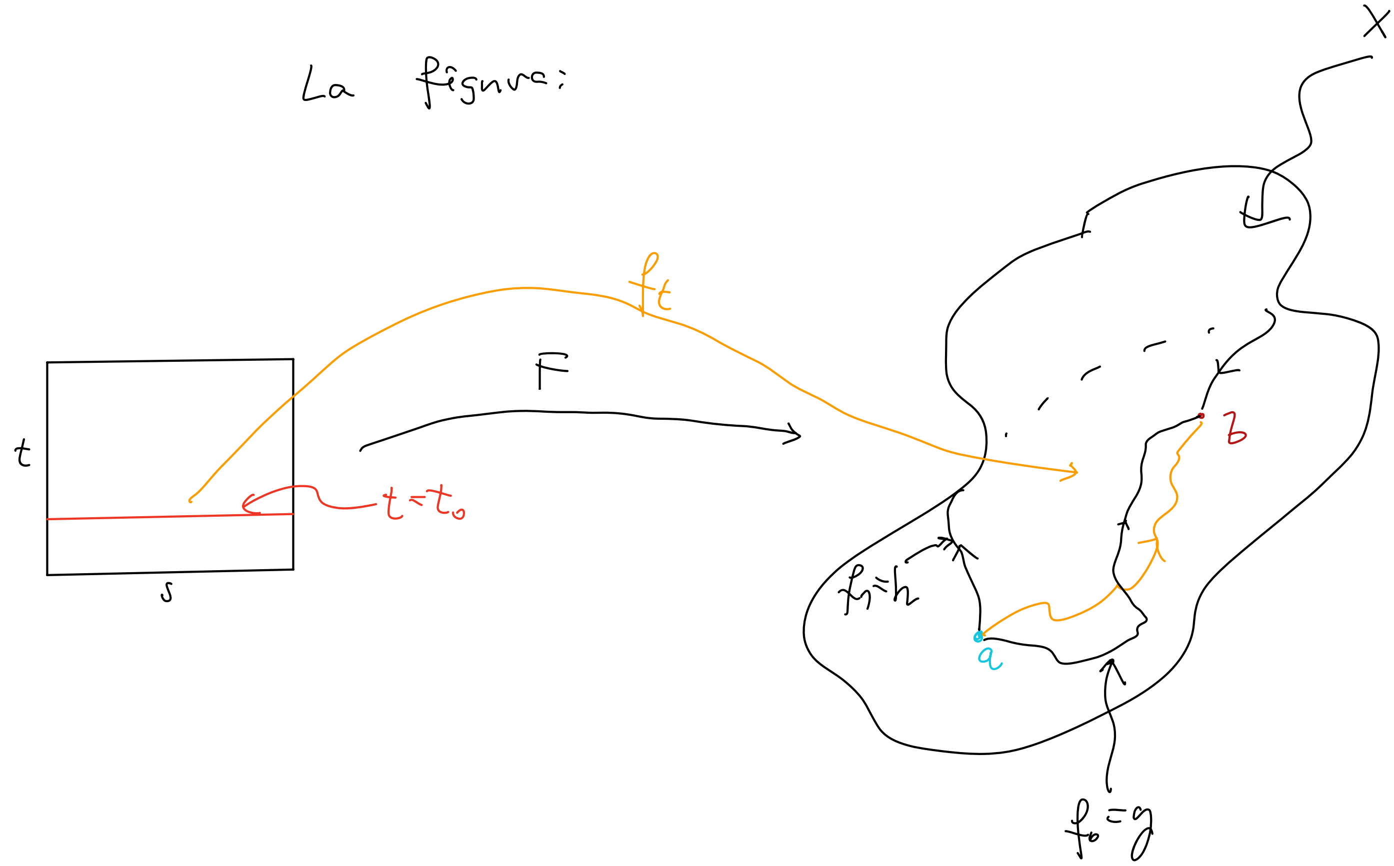
A. $f_0 = g$

B. $f_1 = h$

c. $f_t(0)=a$

d. $f_t(1)=b$

La figura:




Esempio 1 Sia $X\subset\mathbb{R}^n$ convesso, e siano $g,h: I\to X$ cammini con gli stessi punti iniziali e finali. Sia

$$I\times I \xrightarrow{F} X$$
$$(s,t)\longmapsto (1-t)\,g(s)+t\,h(s)$$

(Notate: F è ben definita perchè X è convesso.)

Allora F è una omotopia tra g e h.

**DEF 3** Cammini $g, h$ in $X$ con gli stessi punti iniziali e finali sono <u>omotopicamente equivalenti</u> se esiste una omotopia tra $f$ e $g$.

**Esempio 2** Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e siano

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{g} X \\ s &\longmapsto (\cos \pi s, \sin \pi s) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} I &\xrightarrow{h} X \\ s &\longmapsto (\cos \pi s, -\sin \pi s) \end{aligned}$$

Allora

$$g(0) = h(0) = (1,0) \qquad g(1) = h(1) = (-1,0)$$

Si dimostra che $g$ e $h$ non sono omotopicamente equivalenti, ma questo non è banale. (Lo dimostreremo.)

**PROP 1** Siano $a, b \in X$. La relazione di equivalenza omotopica sull'insieme dei cammini $g : I \to X$ con $g(0) = a$ $g(1) = b$ è di equivalenza.

**Notazione** Siano $g, h : I \to X$ cammini con gli stessi punti iniziali e finali. Se $g, h$ sono omotopicamente equivalenti, poniamo

$$g \sim h.$$

(Nota: se scriviamo $g \sim h$ è sottinteso che $g(0) = h(0)$ e $g(1) = h(1)$, e che $g, h$ sono omotopicamente equivalenti.)

**DEF 4** Sia $g : I \to X$ un cammino. Una **riparametrizzazione di $g$** è un cammino

$$h = g \circ \varphi$$

(composizione, non giunzione), dove

$$I \xrightarrow{\varphi} I$$

è un'applicazione continua tale che

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1.$$

Notate che

$$h(0) = g(0), \qquad h(1) = g(1).$$

**PROP 2** Sia $g : I \to X$ un cammino, e sia $h : I \to X$ una riparametrizzazione di $g$. Allora

$$h \sim g.$$

**DIM** Per ipotesi esiste $\varphi : I \to I$ continua con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$ tale che $h = g \circ \varphi$. Sia

$$\begin{aligned} I \times I &\xrightarrow{F} X \\ (s, t) &\longmapsto g((1-t)s + t\varphi(s)) \end{aligned}$$

Questa è una omotopia tra $g$ e $h$. $\square$

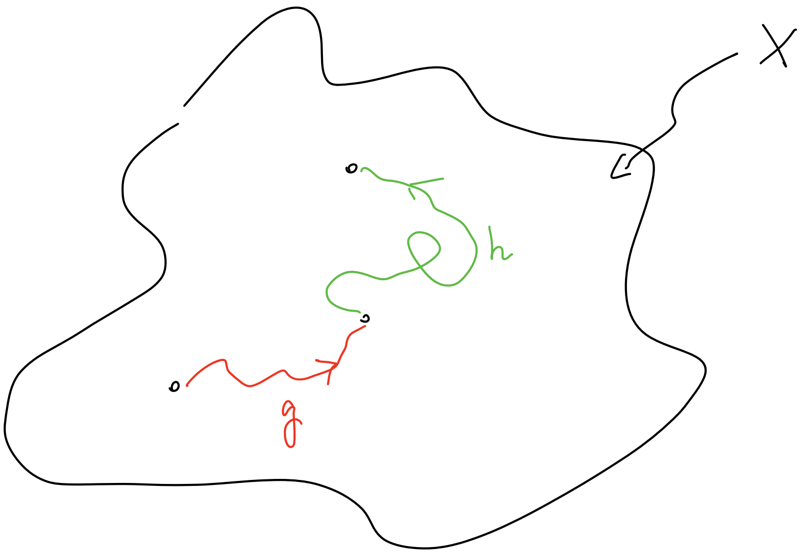
**DEF 5** Siano $g, h$ cammini in $X$ con

$$g(1)=h(0).$$

La <u>giunzione di $g$ e $h$</u> è il cammino

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{g*h} X \\ s &\longmapsto \begin{cases} g(2s) & 0\leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Figura




$g*h$: "$g$ al doppio della velocità, poi $h$ al doppio della velocità"

**PROP 3** Siano $g_1, h_1$ cammini in $X$ con

$$g_1(1)=h_1(0).$$

Se $g_2, h_2$ sono cammini in $X$ tali che $g_2 \sim g_1$ e $h_2 \sim h_1$, allora

$$g_2 * h_2 \sim g_1 * h_1.$$

**PROP 4** Siano $g_1, g_2, g_3 : I \to X$ cammini in $X$ tali che

$$g_2(0) = g_1(1), \qquad g_3(0) = g_2(1).$$

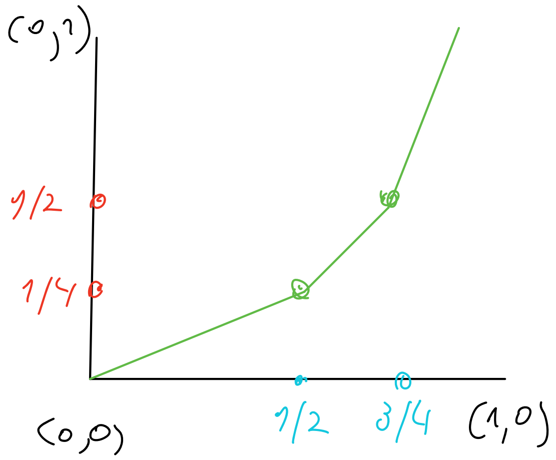
Allora

$$(g_1 * g_2) * g_3 \sim g_1 * (g_2 * g_3).$$

**DIM** Si dimostra che $(g_1 * g_2) * g_3$ è una riparametrizzazione di $g_1 * (g_2 * g_3)$. Infatti sia

$$I \xrightarrow{\varphi} I$$

la funzione con grafico




Allora

$$g_1 * (g_2 * g_3) \circ \varphi.$$

□

**DEF 6** Il cammino costante con valore $a \in X$ è definito da

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{1_a} X \\ s &\longmapsto a \end{aligned}$$

**DEF 7** Sia $g: I \to X$ un cammino. Il cammino inverso di $g$ è il cammino

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\bar{g}} X \\ s &\longmapsto g(1-s) \end{aligned}$$

Notate che $\bar{g}(0) = g(1)$ e $\bar{g}(1) = g(0)$. Quindi la giunzione $g * \bar{g}$ è definita, e

$$g * \bar{g}(0) = g * \bar{g}(1) = g(0).$$

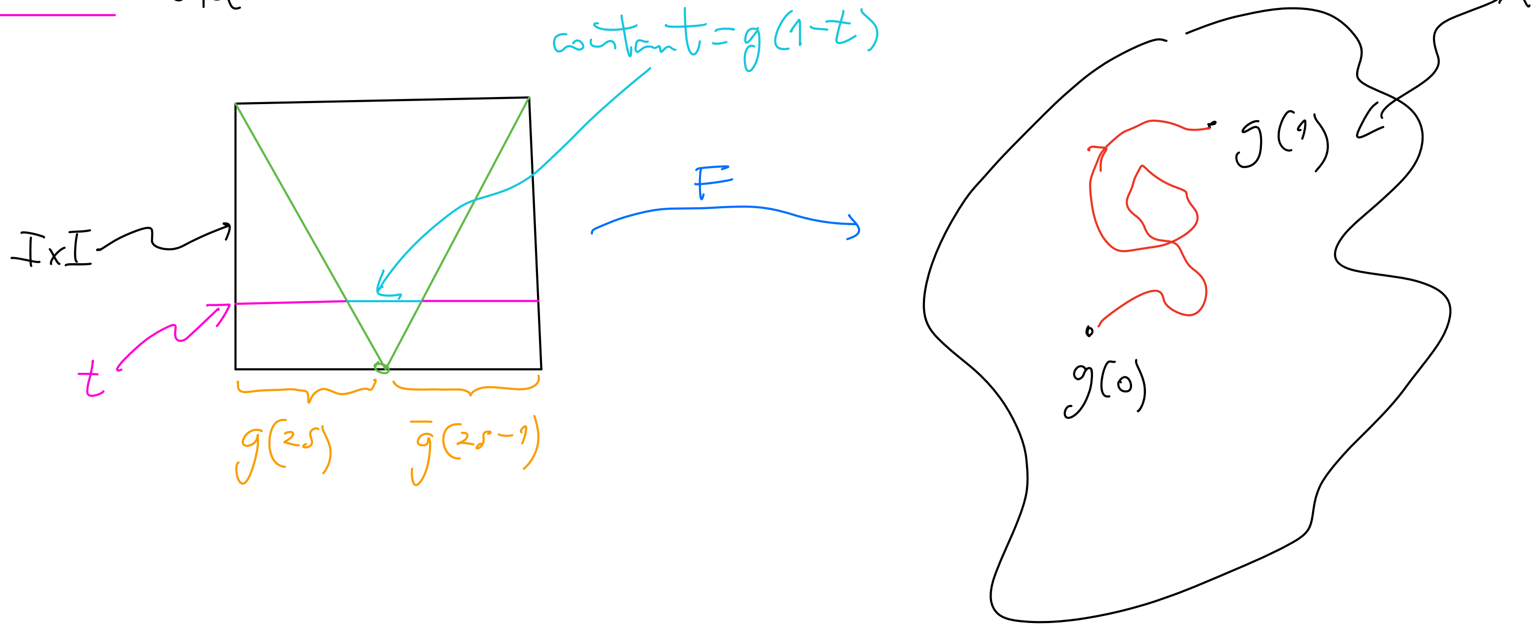
Notate anche che

$$\overline{(\bar{g})} = g.$$

**PROP 5** Sia $g: I \to X$ un cammino, e sia $\bar{g}: I \to X$ il cammino inverso. Allora $g * \bar{g}$ è omotopicamente equivalente al cammino costante con valore $g(0)$, cioè

$$g * \bar{g} \sim 1_a$$

**DIM** Sia




$$F(s,t) := \begin{cases} g(2s) & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(1-t) \\ g(1-t) & \text{se} \quad \frac{1}{2}(1-t) \leq s \leq \frac{1}{2}(1+t) \\ \bar{g}(2s-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2}(1+t) \leq s \leq 1 . \end{cases}$$

Allora $F$ è una omotopia tra $g * \bar{g}$ e $1_{g(0)}$. $\square$

**DEF 8** Siano $X$ uno spazio topologico e $x_0 \in X$. Poniamo

$$\pi_1(X, x_0) := \{ I \xrightarrow{g} X \mid g \text{ cammino t.c. } g(0) = g(1) = x_0 \} / \sim$$

relazione di equivalenza omotopica.

Definiamo l'operazione

$$\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$$
$$([g],[h])\longmapsto[g*h]=:[g]\cdot[h]$$

(L'operazione è ben definita per la Prop. 3.)

PROP 5 Con questa operazione $\pi_1(X,x_0)$ è un gruppo.

DIM Si dimostra che se $[g]\in\pi_1(X,x_0)$, allora

$$[1_{x_0}]\cdot[g]=[g]\cdot[1_{x_0}]=[g].$$

Inoltre

$$[g]\cdot[\bar{g}]=[\bar{g}]\cdot[g]=[1_{x_0}]$$

per la Prop. 5, e l'associatività vale per la Prop. 4. $\square$

Esempio 3 $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ è il gruppo banale per l'Esempio 2.

Esempio 4 $\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}$, ma questo richiede lavoro (lo faremo).