1. Gruppo fondamentale e punto base

X spazio topologico

$x_0, x_1 \in X$.

Abbiamo i gruppi $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$.

Supponiamo che esista un cammino

$$I \xrightarrow{\gamma} X$$

tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega(X, x_1) &\longrightarrow \Omega(X, x_0) \\ f &\longmapsto \gamma * f * \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Se $g \sim f$ allora $\gamma * g * \bar{\gamma} \sim \gamma * f * \bar{\gamma}$. Quindi abbiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\xrightarrow{T_\gamma} \pi_1(X, x_0) \\ [f] &\longmapsto [\gamma * f * \bar{\gamma}] \end{aligned}$$

PROP 1 L'applicazione T_γ è un isomorfismo di gruppi.

DIM Dimostriamo che T_γ è un omomorfismo di gruppi:

$$T_\gamma([f]\cdot[g]) = T_\gamma([f * g]) = [\gamma * f * g * \bar{\gamma}] = [\gamma * f * \bar{\gamma} * \gamma * g * \bar{\gamma}] = T_\gamma([f]) \cdot T_\gamma([g])$$

Inoltre $T_{\bar{\gamma}} \circ T_\gamma = Id$ e $T_\gamma \circ T_{\bar{\gamma}} = Id$, quindi T_γ è un isomorfismo. $\square$

COR 1 Se X è connesso per archi la classe di isomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ è indipendente da x_0.

Notazione Se X è connesso per archi denotiamo con $\pi_1(X)$ il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ per un qualsiasi $x_0 \in X$.

DEF 1 Uno sp. top. X è <u>semplicemente connesso</u> se è connesso per archi e $\pi_1(X)$ è il gruppo banale.

Esempio 1 $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

OSS 1 Uno sp. top. X è semplicemente connesso se e solo se due cammini in X con stessi punti iniziali e finali sono omotopicamente equivalenti.

2. Il gruppo fondamentale del cerchio.

Per $n \in \mathbb{Z}$ sia

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\omega_n} S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi n s), \sin(2\pi n s)) \end{aligned}$$

(Ricordiamo che $I = [0,1]$.) Notate che ω_n è un laccio in S^1 con punto iniziale (= p.to finale perché laccio) uguale a $(1,0)$.

TEOREMA 1 L'applicazione

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S_1)$$

è un isomorfismo di gruppi.

Prima di dimostrare il Teorema, diamo alcune conseguenze.

3. T.F.A.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Se $P \in \mathbb{C}[z]$ è un polinomio di grado (strettamente) positivo, allora P ha radici.

DIM Possiamo assumere che

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \qquad n \geq 0.$$

Supponiamo che P non abbia radici e dimostriamo che $n=0$. Per $R \geq 0$ sia

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\gamma_R} S^1 \\ s &\longmapsto \frac{P(Re^{2\pi i s}) \cdot |P(R)|}{|P(Re^{2\pi i s})| \cdot P(R)} \end{aligned}$$

(γ_R è definita perchè P non ha radici.)

Notate che γ_R è un laccio in S_1 con p.to iniziale (e finale) 1. La classe di omotopia di γ_R è indipendente da R, e per $R=0$ il laccio è costante, quindi

$$[\gamma_R] = 0 \in \mathbb{Z} = \pi_1(S).$$

D'altra parte (vedi [Hatcher, p. 31]) γ_R è omotopo al laccio ω_n del Teorema 1. Quindi $n=0$. $\square$

4. Teorema del punto fisso di Brouwer.

Sia $D_n = \overline{B_0(1)} \subset \mathbb{R}^n$ la palla (chiusa) di dimensione n.

Il Teorema del punto fisso di Brouwer afferma che ogni applicazione continua

$$D_n \xrightarrow{f} D_n$$

ha (almeno) un punto fisso, cioè esiste $x \in D_n$ t.c. $f(x) = x$.

Se $n=1$ il risultato segue da Bolzano-Weierstraß applicato alla funzione $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Nel caso $n=2$ segue dal Teorema 1

<u>TEOREMA 2</u> Se $f : D^2 \to D^2$ è continua, esiste un punto fisso di f.

<u>DIM</u> Per contraddizione. Se non esiste un p.to fisso di f si definisce

$$D^2 \xrightarrow{g} S^1$$

continua e tale che

$$g(x) = x \quad \text{per ogni } x \in S^1.$$

Questo contraddice il Teorema 1. Infatti siano $x_0 \in S^1$ e

$$0 \neq [\gamma_0] \in \pi_1(S^1, x_0).$$

Siccome $\pi_1(D^2, x_0)$ è banale esiste una omotopia $\{\gamma_t\}_{t\in I}$ (in D^2) con $\gamma_1 = 1_{x_0}$. Allora $\{g \circ \gamma_t\}_{t\in I}$ è una omotopia tra $g\circ\gamma_0 = \gamma_0$ e $g\circ\gamma_1 = 1_{x_0}$, contraddizione. $\square$

5. Dimostrazione del Teorema 1.

6. Teorema di Borsuk-Ulam

Il Teorema di Borsuk-Ulam afferma che se

$$S^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

è continua, allora esiste $x \in S^n$ tale che

$$f(x) = f(-x).$$

Se $n=1$ abbiamo visto la dimostrazione.

TEOREMA 3

Sia $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Allora esiste $x \in S^n$ tale che

$$f(x) = f(-x).$$

DIM [Hatcher, p. 33]

COR 1 Se $S^n = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ con A_1, A_2, A_3 chiusi, allora esiste $i \in \{1, 2, 3\}$ t.c. A_i contiene due punti antipodali.

DIM [Hatcher, p. 33]

COR 2 Siano X, Y varietà topologiche di dimensioni 2 e n. Se X è omeomorfa a Y, allora $2 = n$.

DIM Abbiamo dimostrato che $n \geq 2$. Supponiamo che $n > 2$. Sia $f : Y \xrightarrow{\sim} X$ un omeomorfismo. Otteniamo un omeomorfismo

$$g : A \xrightarrow{\sim} B$$

dove $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ sono aperti non vuoti. Siccome $n \geq 3$ esiste $Z \subset A$ omeomorfo a S^2. La restrizione di g a Z definire un'applicazione continua e iniettiva

$$\begin{aligned} Z &\hookrightarrow B \subset \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

Questo contraddice il Teorema 3.