Fine della dimostrazione del Teorema "$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$".

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad p \quad} S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \end{aligned}$$

e che dobbiamo dimostrare che valgono:

A. Siano dati

$x_0 \in S^1$,

$I \xrightarrow{\gamma} S^1$ un cammino con $\gamma(0) = x_0$, e

$\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Allora esiste

$$I \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathbb{R}$$

tale che

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 \quad \text{e} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma,$$

e tale $\tilde{\gamma}$ è unico. (Si dice che $\tilde{\gamma}$ è il sollevamento di γ che parte da $\tilde{x}_0$.)

B. Siano dati

$$x_0 \in S^1,$$

una omotopia

$$I \times I \xrightarrow{F} S^1$$

di cammini f_t ($f_t(s) = F(s,t)$) con

$$f_t(0) = x_0 \qquad \forall t \in I$$

(essendo una omotopia si ha $f_t(1) = y_0$ per un $y_0 \in S^1$ fissato),

e $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Allora esiste una omotopia

$$I \times I \xrightarrow{\tilde{F}} S^1$$

di cammini $\tilde{f}_t$ ($\tilde{f}_t(s) = \tilde{F}(s,t)$) con

$$\begin{cases} f_t(0) = \tilde{x}_0 \\ p \circ \tilde{f}_t = f_t \end{cases} \qquad \forall t \in I$$

Inoltre tale $\tilde{F}$ è unica.

Lemma 1

X sp. top. connesso e $\varphi : X \to S^1$ applicazione continua. Supponiamo che esistano due sollevamenti di φ a $\mathbb{R}$, cioè applicazioni continue $\varphi_1 : X \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ tali che

$$p \circ \varphi_1 = p \circ \varphi_2 = \varphi$$

In altre parole abbiamo due diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] & s \arrow[d, mapsto] \\
X \arrow[ur, bend left, "\varphi_1"] \arrow[ur, bend right, "\varphi_2"'] \arrow[r, "\varphi"'] & S^1 & (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)
\end{tikzcd}$$

Allora il sottoinsieme di X dato da

$$\Omega := \{ x \in X \mid \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \}$$

è vuoto oppure è uguale a X.

DIM Siccome

$$\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p(s_1) = p(s_2) \} = \{ (s_1, s_2) \mid s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \}$$

abbiamo un'applicazione continua

$$X \times X \xrightarrow{\ \Phi\ } \{ (s_1, s_2) \mid s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \} =: \Sigma$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$$

Inoltre

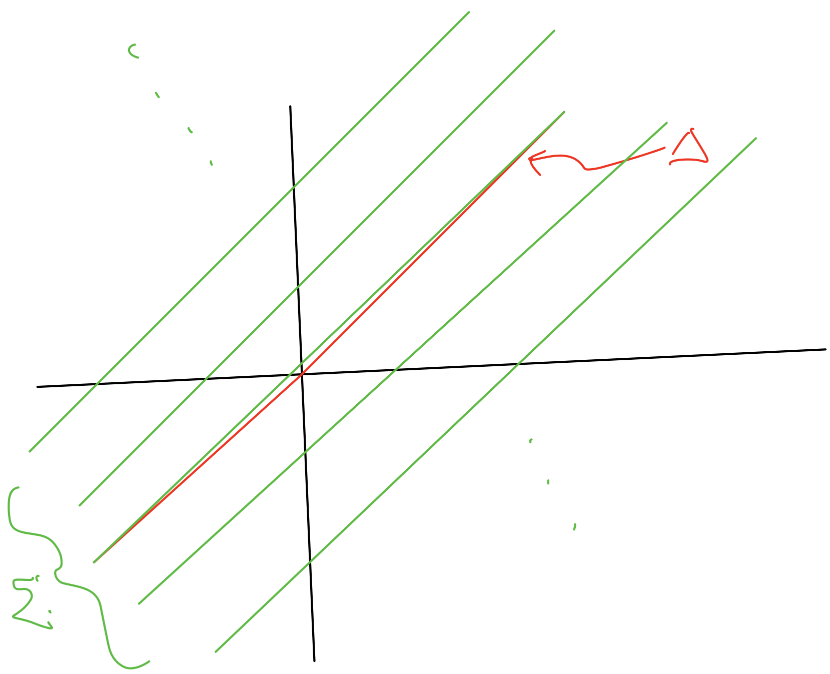
$$\Omega = \Phi^{-1}(\{ (s_1, s_2) \mid s_1 = s_2 \})$$

Siccome la diagonale

$$\Delta := \{ (s_1, s_2) \mid s_1 = s_2 \}$$

è chiusa e aperta in

$$\{ (s_1, s_2) \mid s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \},$$



segue che Ω è chiuso e aperto in X. Quindi la tesi segue dall'ipotesi che X sia connesso. $\square$

COR 1 Con le ipotesi del Lemma 2, supponiamo che esista $x_0 \in X$ t.c. $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$. Allora $\varphi_1 = \varphi_2$.

Lemma 2 (del numero di Lebesgue)

Siano (X,d) uno spazio metrico compatto e $\{V_i\}_{i\in I}$ un suo ricoprimento aperto. Esiste $\delta>0$ tale che per ogni $x\in X$ la palla aperta $B(x,\delta)$ di centro x e raggio δ è contenuta in uno degli aperti V_i.

DIM Vedi, per esempio, [Manetti, Teorema 11.23]. $\square$

OSS 1 Esiste un ricoprimento aperto $\{U_j\}_{j\in J}$ di S^1 con la seguente proprietà:
Per ogni $j\in J$ la controimmagine $p^{-1}(U_j)$ è l'unione disgiunta di aperti $V\subset\mathbb{R}$ tali che l'applicazione

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow U_j \\ s &\longmapsto p(s) \end{aligned}$$

sia un omeomorfismo.
Infatti un tale ricoprimento è

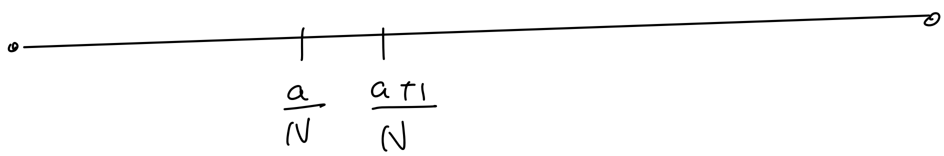
$$\{S^1\setminus\{(-1,0)\},\ S^1\setminus\{(1,0)\}\}$$

(Ma ce ne sono infiniti altri.)

Dimostrazione di A.

Sia $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto come nell'Oss. 2.

Per il Lemma 2 applicato a $X=[0,1]$ con la metrica euclidea, e al ricoprimento $\{\gamma^{-1}(U_j)\}_{j\in J}$, esiste N tale che per ogni $0\leq a\leq N-2$ l'intervallo $[\frac{a}{N},\frac{a+1}{N}]$ è contenuto in un $\gamma^{-1}(U_{j(a)})$.



Per la proprietà che caratterizza $U_{j(a)}$, dato $y_{j(a)}\in\mathbb{R}$ t.c.

$$p(y_{j(a)})=\frac{a}{N},$$

esiste un'applicazione continua

$$\left[\frac{a}{N},\frac{a+1}{N}\right]\xrightarrow{\tilde{\gamma}_{j(a)}}\mathbb{R}$$

t.c.

$$p\circ\tilde{\gamma}_{j(a)}=\gamma\big|_{[\frac{a}{N},\frac{a+1}{N}]}$$

Scegliamo

$$y_{j(0)}=\tilde{x}_0,\quad y_{j(1)}=\tilde{\gamma}_{j(0)}\left(\frac{1}{N}\right),\quad y_{j(2)}=\tilde{\gamma}_{j(1)}\left(\frac{2}{N}\right),\ \dots\ ,\ y_{j(N-1)}=\tilde{\gamma}_{j(N-2)}\left(\frac{N-1}{N}\right),$$

e incolliamo $\gamma_{j(0)}, \gamma_{j(1)}, \dots, \gamma_{j(N-1)}$. Otteniamo

$$[0,1] \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathbb{R}$$

t.c. $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. L'unicità di $\tilde{\gamma}$ segue dal Corollario 1. $\square$

Dimostrazione di B.

La dimostrazione è simile, ma i segmenti $[\frac{a}{N}, \frac{a+1}{N}]$ vengono sostituiti da quadrati.

Per il Lemma 2 applicato a $X = I \times I$ con la metrica euclidea, e al ricoprimento $\{F^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$, esiste N tale che per ogni $0 \leq a, b \leq N-1$ il quadrato $[\frac{a}{N}, \frac{a+1}{N}] \times [\frac{b}{N}, \frac{b+1}{N}]$ è contenuto in un $F^{-1}(U_{j(a,b)})$.

Per la proprietà che caratterizza $U_{j(a,b)}$, dato $y_{j(a,b)} \in \mathbb{R}$ t.c.

$$p(y_{j(a,b)}) = \left(\frac{a}{N}, \frac{b}{N}\right),$$

esiste un'applicazione continua

$$\left[\frac{a}{N}, \frac{a+1}{N}\right] \xrightarrow{\tilde{F}_{j(a,b)}} \mathbb{R}$$

t.c.

$$p \circ \tilde{F}_{j(a,b)} = F|_{[\frac{a}{N}, \frac{a+1}{N}] \times [\frac{b}{N}, \frac{b+1}{N}]}$$

Usando l'unicità del Corollario 1, vediamo che possiamo scegliere gli $j(a,b)$ in modo che gli $\tilde{F}_{j(a,b)}$ si incollino e diano $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ continua tale che $\tilde{F}(0,t) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{F} = F$. L'unicità di $\tilde{F}$ segue dal Corollario 1. $\square$

2. Il Teorema di Borsuk-Ulam

Diamo un'altra conseguenza del risultato "$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$".

Teorema di Borsuk-Ulam

Sia

$$S^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

continua. Allora esiste $x \in S^n$ tale che

$$f(x) = f(-x).$$

Abbiamo visto la dimostrazione per $n=1$.
Diamo la dimostrazione per $n=2$.

TEOREMA 1 (Caso $n=2$ di Borsuk-Ulam)

Sia $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua. Allora esiste $x \in S^n$ tale che

$$f(x) = f(-x).$$

DIM Per assurdo. Supponiamo che $f(x) \neq f(-x)$ per ogni $x \in S^2$. Allora è ben definita l'applicazione

$$\begin{aligned} S^2 &\xrightarrow{\ \varphi\ } S^1 \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|} \end{aligned}$$

Inoltre φ è continua. Consideriamo il laccio in S^2 dato da

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\ \gamma\ } S^2 \\ s &\longmapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \end{aligned}$$

La composizione

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ \gamma"'] & S^2 \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \end{tikzcd}$$

è un laccio, quindi

$$[\varphi \circ \gamma] \in \pi_1(S^1)$$

Chiaramente γ è omotopo a un laccio costante in S^2. Quindi esiste una omotopia di lacci $\{\gamma_t\}_{t \in I}$ con $\gamma_0 = \gamma$ e γ_1 laccio costante. Segue che $\{\varphi \circ \gamma_t\}_{t \in I}$ è una omotopia di lacci con $\varphi \circ \gamma_0 = \varphi \circ \gamma$ e $\varphi \circ \gamma_1$ ma laccio costante. Segue che

$$[\varphi \circ \gamma] = 0 \in \mathbb{Z} = \pi_1(S^1).$$

Ora mostriamo che

$$[\varphi \circ \gamma] \neq 0. \qquad (*)$$

Il motivo è che

$$\varphi(-x) = -\varphi(x). \qquad (+)$$

Infatti sia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ il sollevamento di $\varphi \circ \gamma$ tale che $\alpha(0)=0$.

Da $(+)$ segue che $\forall s \in [0, \frac{1}{2}]$

$$(\circledcirc) \qquad \alpha(s+\tfrac{1}{2}) = \alpha(s) + \frac{q(s)}{2} \qquad q(s) \in \mathbb{Z} \text{ dispari}$$

Ora $q : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{Z}$ è continua (è uguale a $\alpha(s+\frac{1}{2}) - \alpha(s)$), quindi è costante: $q(s) = q$ $\forall s \in [0, \frac{1}{2}]$. Da $(\circledcirc)$ segue che

$$\alpha(1) = \alpha(\tfrac{1}{2}) + \frac{q}{2} = \alpha(0) + q.$$

Quindi

$$[\varphi \circ \gamma] = q \in \mathbb{Z} = \pi_1(S^1).$$

Siccome q è dispari, questo dimostra $(*)$. $\square$

COR 2 Se $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ con A_1, A_2, A_3 chiusi, allora esiste $i \in \{1,2,3\}$ t.c. A_i contiene due punti antipodali.

DIM Sia d la distanza euclidea su S^2. Per $i \in \{1,2,3\}$ sia

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{d_i} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \min\{d(x,y) \mid y \in A_i\} \end{array}$$

Esiste perché A_i è compatto e la funzione distanza è continua.

L'applicazione d_i è continua, e quindi anche l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (d_1(x), d_2(x)) \end{array}$$

Per il Teorema di Borsuk-Ulam (per $n=2$), esiste $x \in S^2$ t.c.

$$f(x) = f(-x),$$

cioè

$$d_1(x) = d_1(-x) \quad \text{e} \quad d_2(x) = d_2(-x).$$

Se $d_1(x) = 0$, allora $x, -x \in A_1$ e abbiamo fatto.

Analogamente, se $d_2(x)=0$, allora $x,-x \in A_1$ e abbiamo fatto. Quindi possiamo supporre che

$$d_1(x) \neq 0 \quad e \quad d_2(x) \neq 0.$$

Siccome $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, segue che $x \in A_3$, e anche che $-x \in A_3$. $\square$

<u>COR 3</u> Siano X, Y varietà topologiche di dimensioni 2 e n. Se X è omeomorfa a Y, allora $2=n$.

<u>DIM</u> Abbiamo dimostrato che $n \geq 2$. Supponiamo che $n > 2$. Sia $f : Y \xrightarrow{\sim} X$ un omeomorfismo. Otteniamo un omeomorfismo

$$g : A \xrightarrow{\sim} B$$

dove $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ sono aperti non vuoti. Siccome $n \geq 3$ esiste $Z \subset A$

omeomorfo a S^1. La restrizione di g a Z definisce un'applicazione continua e iniettiva

$$\begin{aligned} Z &\hookrightarrow B \subset \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

Questo contraddice il Teorema 1. $\square$