1. Proprietà funtoriali del gruppo fondamentale.

DEF 1 Una coppia (X, A) consiste di uno sp. top. X e un sottospazio $A \subset X$. Un'applicazione di coppie

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$$

è un'applicazione $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subset B$, ed è continua se f è continua.

Notazione Se $x_0 \in X$ denotiamo (X, x_0) la coppia $(X, \{x_0\})$.

Sia

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

continua. Abbiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega(X, x_0, x_0) &\longrightarrow \Omega(Y, y_0, y_0) \\ \gamma &\longmapsto f \circ \gamma \end{aligned}$$

Si verifica (facilmente) che se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ allora $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$, e quindi possiamo definire

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

PROP 1 L'applicazione f_* è un omomorfismo di gruppi.

PROP 2

A. $Id_{(X,x_0),*} = Id_{\pi_1(X,x_0)}$

B. Siano

$$(X,x_0) \xrightarrow{g} (Y,y_0) \xrightarrow{f} (Z,z_0)$$

continue. Allora

$$(f \circ g)_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Z,z_0)$$

è uguale a

$$f_* \circ g_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Z,z_0)$$

COR 1 Se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo, allora

$$\pi_1(X,x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$$

è un isomorfismo di gruppi.

DEF 2 Siano X uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottospazio. Una retrazione di X su A è una

$$X \xrightarrow{f} A$$

continua tale che $f(a) = a$ per ogni $a \in A$. Se esiste una retrazione di X su A diciamo che A è un retratto di X.

COR 2 Sia $A \subset X$ un retratto di X, e sia $i: A \hookrightarrow X$ l'inclusione. Allora, dato $a_0 \in A$, l'omomorfismo

$$\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0)$$

è iniettivo.

DIM Sia $f: X \to A$ una retrazione. Allora $f \circ i = Id_A$, e quindi

$$f_* \circ i_* = (f \circ i)_* = Id_{A,*} = Id_{\pi_1(A, a_0)}$$

Segue che i_* è iniettiva. $\square$

Esempio 1 S^1 non è un retratto di D^2 (già notato quando abbiamo dimostrato il Teorema di Brouwer per D^2). Infatti, siccome $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(D^2)$ è banale, non esiste un omomorfismo iniettivo $\pi_1(S^1) \to \pi_1(D^2)$.

2. Equivalenza omotopica

Se due sp. top. (connessi per archi) hanno gruppi fondamentali non isomorfi, allora non sono omeomorfi. In verità segue che non sono equivalenti per una relazione molto più debole.

DEF 3 Siano $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ applicazioni continue. Una omotopia tra f e g è un'applicazione continua

$$X \times I \xrightarrow{\Phi} Y$$

t.c.

$$\Phi(x,0) = f(x) \qquad \forall x \in X,$$
$$\Phi(x,1) = g(x)$$

le applicazioni f e g sono omotope se esiste una omotopia tra f e g.

OSS 1 La relazione sull'insieme

$$\{ f : X \to Y \mid f \text{ continua} \}$$

definita dall'omotopia è di equivalenza. La denotiamo con $\sim$. Quindi $f \sim g$ significa che f e g sono omotope.

Esempio 2 Le applicazioni (continue)

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

sono omotope. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times I &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto tx \end{aligned}$$

è una omotopia tra f e $Id_{\mathbb{R}^n}$.

OSS 2 Siano

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

continue. Se $g_1 : X \to Y$ è omotopa a g, e $f_1 : Y \to Z$ è omotopa a f, allora

$$f_1 \circ g_1 \sim f \circ g.$$

DEF 4 Siano X e Y sp. top. Un'applicazione (continua)

$$X \xrightarrow{f} Y$$

è un'equivalenza omotopica se esiste

$$Y \xrightarrow{g} X$$

continua t.c.

$$g \circ f \simeq Id_X \quad e \quad f \circ g \simeq Id_Y$$

L'applicazione g è una inversa omotopica di g.

DEF 5 Sp. top. X e Y sono omotopicamente equivalenti se esiste un'equivalenza omotopica

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

Esempio 3 $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente a un punto.

DEF 6 Uno sp. top. X è contraibile se è omotopicamente equivalente a un punto, cioè se $Id_X \simeq f$ dove $f : X \to X$ è un'applicazione con immagine un singoletto.

OSS 3 Se X è contraibile, allora X è connesso per archi (immediato). Quindi se X non è connesso per archi, non è contraibile.

Il gruppo fondamentale ci dà uno strumento più raffinato che può aiutare a escludere che uno sp. top. sia contraibile.

PROP 3 Sia $X \xrightarrow{f} Y$ un'equivalenza omotopica. Allora, se $x_0 \in X$,

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$$

è un isomorfismo di gruppi.

DIM Vedi [Hatcher, Prop. 1.18 p. 37].

Esempio 4 Segue dalla Prop. 3, e dal fatto che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, che S^1 non è contraibile. (Richiamando l'Oss. 3, notate che S^1 è connesso per archi.)

3. Prodotto libero di gruppi

Il Teorema di Van Kampen esprime il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ di $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ (dove $x_0 \in \bigcap_\alpha A_\alpha$) in termini dei gruppi $\pi_1(A_\alpha, x_0)$, sotto certe ipotesi.

Per formulare questo risultato serve la nozione di prodotto libero di gruppi.

Sia $\{G_\alpha\}$ una collezione di gruppi. Notate che ammettiamo che esistano $\alpha_1 \neq \alpha_2$ con G_{α_1} isomorfo a G_{α_2}.

Sia PAROLE l'insieme delle parole

$$g_1 \cdots g_m \qquad g_i \in G_{\alpha(i)} \text{ per } i \in \{1, \dots, m\}.$$

(inclusa la parola vuota, che denotiamo $\emptyset$).

Sia $\sim$ la rel. di equiv. su PAROLE generata da

$$g_1 \cdots g_m \sim g_1 \cdots g_{i-1} (g_i g_{i+1}) g_{i+1} \cdots g_m \qquad \text{se } \alpha(i) = \alpha(i+1)$$

$$g_1 \cdots g_{i-2}\, 1\, g_{i+1} \cdots g_m \sim g_1 \cdots g_{i-1} g_{i+1} \cdots g_m.$$

Poniamo

$$*_\alpha G_\alpha := \text{PAROLE}/\sim$$

LEMMA 1 Ogni $g_1 \cdots g_m \in$ PAROLE ha unico rappresentante

$$h_1 \cdots h_n$$

(eventualmente $\emptyset$) in cui non appare nessuna unità e per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ $\alpha(i) \neq \alpha(i+1)$.

DIM Vedi [M. Artin "Algebra"], Prop. 7.2 pp. 218-219.

Su PAROLE abbiamo un'operazione

$$(g_1 \cdots g_m) \cdot (h_1 \cdots h_n) := g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n$$

che passa al quoziente

$$(*_\alpha G_\alpha) \times (*_\alpha G_\alpha) \longrightarrow *_\alpha G_\alpha$$
$$([g_1 \cdots g_m], [h_1 \cdots h_n]) \longmapsto [g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n]$$

PROP 4 Con questa operazione $*_\alpha G_\alpha$ è un gruppo libero, il gruppo liberamente generato dai G_α.