1. Richiami sulla lezione del 21-04.

## Equivalenza omotopica e $\pi_1$

Se $f: X \to Y$ è una equivalenza omotopica, allora

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$$

è un isomorfismo.

Esempio 1 Sia $n \geq 2$, cosicché $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $S^{n-1}$ sono connessi per archi.

Allora

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{n-1})$$

perché l'inclusione

$$S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

è un'equivalenza omotopica. Infatti un'inversa omotopica di $i$ è data da

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\xrightarrow{\pi} S^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

In particolare

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Mostreremo tra poco che se $m \geq 2$, allora

$$\pi_1(S^m) \cong \{1\}.$$

Segue che

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{1\} \qquad \text{se } n \geq 3.$$

# Prodotto libero di gruppi

Sia $\{G_\alpha\}$ una famiglia di gruppi. Il prodotto libero

$$*_\alpha G_\alpha$$

ha come elementi le classi di equivalenza di parole

$$g_1 g_2 \cdots g_m \qquad g_i \in G_{\alpha(i)},$$

dove l'equivalenza è generata da:

I. $g_1 \cdots g_i g_{i+1} \cdots g_m \sim g_1 \cdots g_{i-1} (g_i g_{i+1}) g_{i+2} \cdots g_m$ se $\alpha(i) = \alpha(i+1)$

II. $g_1 \cdots g_{i-1} 1 g_{i+1} \cdots g_m \sim g_1 \cdots g_{i-1} g_{i+1} \cdots g_m$

Il prodotto nel gruppo $*_\alpha G_\alpha$ è definito dalla giustapposizione di parole.

Useremo la notazione (ambigua) $g_1 \cdots g_m$ per denotare la classe di equivalenza della parola $g_1 \cdots g_m$ nel gruppo $*_\alpha G_\alpha$.

Notiamo che per ogni $\alpha$ esiste l'omomorphismo iniettivo

$$\begin{aligned} G_\alpha &\hookrightarrow *_\alpha G_\alpha \\ g &\longmapsto g \end{aligned} \qquad (+)$$

# PROPRIETA' UNIVERSALE DEL PRODOTTO LIBERO

Sia $H$ un gruppo e, per ogni $\alpha$, sia

$$G_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} H$$

un omomorfismo di gruppi. Allora esiste un omomorfismo di gruppi

$$*_\alpha G_\alpha \xrightarrow{\varphi} H$$

tale che la composizione

$$G_\alpha \hookrightarrow *_\alpha G_\alpha \xrightarrow{\varphi} H$$

(dove il primo omomorfismo è quello di (†)) sia uguale a $\varphi_\alpha$.

Inoltre un tale omomorfismo è unico.

<u>DIM</u> Un tale omomorfismo, se esiste, è unico perché deve valere

$$\varphi(g_1 \cdots g_m) = \varphi_{\alpha(1)}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha(m)}(g_m). \qquad (*)$$

Si verifica facilmente che la formula in $(*)$ dà un ben definito omomorfismo $*_\alpha G_\alpha \to H$. $\square$

## 2. Il Teorema di Van Kampen.

Facciamo la seguente

IPOTESI 1.

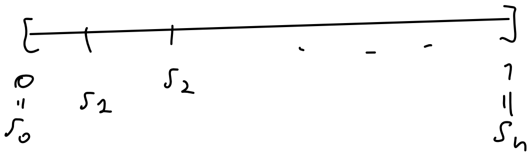
- Lo spazio topologico $X$ è unione di aperti $A_\alpha$, cioè
$$X = \bigcup_\alpha A_\alpha \qquad (\star)$$
- Inoltre $\bigcap_\alpha A_\alpha$ non è vuoto, e $x_0 \in \bigcap_\alpha A_\alpha$.
- L'intersezione $A_\alpha \cap A_\beta$ è connessa per archi per ogni coppia $A_\alpha, A_\beta$ di aperti in $(\star)$.

Supponiamo che valga l'Ipotesi 1. L'inclusione $i_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow X$ definisce un omomorfismo
$$\pi_1(A_\alpha, x_0) \xrightarrow{j_\alpha := i_{\alpha,*}} \pi_1(X, x_0)$$

Per la proprietà universale del prodotto libero esiste un omomorfismo
$$*_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X, x_0)$$
tale che per ogni $\alpha$ la composizione
$$\pi_1(A_\alpha, x_0) \longrightarrow *_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X, x_0) \qquad (\blacksquare)$$
sia uguale a $j_\alpha$ (e un tale omomorfismo è unico).

**TEOREMA 1 (Van Kampen facile)** Supponiamo che valga l'Ipotesi 1. Allora l'omomorfismo in $(\circledast)$ è suriettivo.

**DIM** Sia $\sigma : I \longrightarrow X$ un laccio con estremi in $x_0$. Per il Lemma del numero di Lebesgue esiste una suddivisione




tale che

$$\sigma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_{\alpha_i} \qquad \text{per } i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Quindi

$$s_i \in A_{\alpha_{i-1}} \cap A_{\alpha_i} \qquad \text{per } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Siccome $A_{\alpha_{i-1}} \cap A_{\alpha_i}$ è connesso per archi, esiste un cammino

$$I \xrightarrow{\gamma_i} A_{\alpha_{i-1}} \cap A_{\alpha_i} \qquad i \in \{1, \dots, n\}$$

tale che

$$\gamma_i(0) = x_0 \qquad \gamma_i(1) = s_i$$

Sia

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\sigma_i} X \\ t &\longmapsto s_i + t(s_{i+1} - s_i) \end{aligned}$$

Abbiamo omotopie

$$\sigma \sim \sigma_0 * \sigma_1 * \dots * \sigma_n \sim (\sigma_0 * \bar{\gamma}_1) * (\gamma_1 * \sigma_1 * \bar{\gamma}_2) * \dots * (\gamma_{n-1} * \sigma_{n-1} * \bar{\gamma}_n) * (\gamma_n * \sigma_n)$$

Lacci con estremi in $x_0$

Siccome $\sigma_0 * \bar{\gamma}_1$ è un laccio in $A_{\alpha_0}$, $\gamma_1 * \sigma_1 * \bar{\gamma}_2$ è un laccio in $A_{\alpha_1}$, etc., abbiamo scritto $\sigma$ come il prodotto di elementi in $\mathrm{Im}(\varphi_{\alpha_0}), \dots, \mathrm{Im}(\varphi_{\alpha_n})$. $\square$

L'omomorfismo $*_\alpha G_\alpha \to \pi_1(X, x_0)$ in generale non è suriettivo.

Infatti sia

$$\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0) \xrightarrow{\hat{i}_{\alpha\beta}} \pi_1(A_\alpha, x_0)$$

l'omomorfismo indotto dall'inclusione $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$.

(Attenzione: abbiamo anche

$$\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0) \xrightarrow{\hat{i}_{\beta\alpha}} \pi_1(A_\beta, x_0).$$

Il primo indice denota l'indice dell'aperto "di arrivo".)

Se $\sigma \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)$, allora

$$\phi(\hat{i}_{\alpha\beta}(\sigma)) = \phi(\hat{i}_{\beta\alpha}(\sigma)),$$

cioè

$$\phi\left(\hat{i}_{\alpha\beta}(\sigma) \cdot \hat{i}_{\beta\alpha}(\sigma)^{-1}\right) = 1.$$

Quindi

$N :=$ più piccolo sottogruppo normale di $*_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0)$ contenente

$\hat{i}_{\alpha\beta}(\sigma) \cdot \hat{i}_{\beta\alpha}(\sigma)^{-1}$ per ogni $\sigma \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)$

è contenuto nel nucleo di $\phi$, e perciò $\varphi$ induce un omomorfismo

$$*_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0)/N \xrightarrow{\ \overline{\Phi}\ } \pi_1(X, x_0).$$

TEOREMA 2 (Van Kampen difficile) Supponiamo che valga l'Ipotesi 1, e che in aggiunta l'intersezione $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ sia connessa per archi per ogni tripla $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ di aperti in $(*)$. Allora $\overline{\Phi}$ è un isomorfismo.

DIM Potete vedere A. Hatcher pp. 44-46. $\square$

Esempio 2 Se $n \geq 2$, allora $\pi_1(S^n)$ è il gruppo banale.

Esempio 3 $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Esempio 4 $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$