

1. "Avanzi" dall'ultima lezione.

Ricordiamo: Se $n \geq 2$, allora

$\pi_1(S^n)$ è banale.

Infatti

$$(*) \quad S^n = A \cup B$$

$$A = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} \quad B = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}.$$

Le ipotesi del Teorema di Van Kampen sono soddisfatte dal ricoprimento aperto in (*). Infatti

$A \cap B$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$,

quindi è connesso per archi (notate: qui usiamo l'ipotesi $n \geq 2$!).

Sia $x_0 \in A \cap B$. Per Van Kampen abbiamo una suriezione

$$\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(S^n, x_0).$$

Ma $A \cong \mathbb{R}^n \cong B$, quindi $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$ sono banali, e perciò $\pi_1(S^n, x_0)$ è banale.

Definiamo il "bouquet" di spazi topologici puntati:

DEF 1 Sia $\{(X_\alpha, p_\alpha)\}$ una famiglia di spazi topologici puntati.

Il bouquet

$$\bigvee_\alpha (X_\alpha, p_\alpha)$$

è il quoziente

$$\coprod_{\alpha} X_{\alpha} / \sim$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$p_{\alpha} \sim p_{\beta}$$

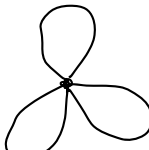
Il bouquet $\bigvee_{\alpha} (X_{\alpha}, p_{\alpha})$ è uno spazio puntato, con punto base classe di equivalenza $q := [p_{\alpha}]$. Spero è chiaro che, a meno di omeomorfismo, il bouquet non dipende dai punti p_{α} (per esempio questo vale se per ogni α e ogni $x \in X_{\alpha}$ esiste un omeomorfismo

$$X_{\alpha} \xrightarrow{f} X_{\alpha}$$

tale che $f(p_{\alpha}) = x$). Nel caso in cui ciascun X_{α} sia una sfera la scelta dei punti base è irrilevante (a meno di omeomorfismo):

$$S^1 \vee S^1 =$$


$$S^1 \vee S^2 =$$


$$S^1 \vee S^1 \vee S^1 =$$


Prop 1 Supponiamo che per ogni α esiste p_α che è un retratto di deformazione di un aperto $U_\alpha \subset X_\alpha$, cioè esiste una omotopia

$$U_\alpha \times I \xrightarrow{\Phi} U_\alpha$$

$$\text{t.c. } \begin{cases} \Phi(x, 0) = x \\ \Phi(x, 1) = p_\alpha \end{cases} \quad \forall x \in U_\alpha$$

$$\Phi(p_\alpha, t) = p_\alpha \quad \forall t \in I$$

Allora

$$\pi_1\left(\bigvee_\alpha X_\alpha, q\right) \cong *_{\alpha} \pi_1(X_\alpha, p_\alpha).$$

Esempio 3 $\pi_1\left(\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_m\right) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_m$

Esempio 4 $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_m\}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_m$

2. Il gruppo fondamentale delle superfici compatte.

Ricordate:

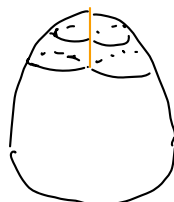
$$M_g := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_g$$

$$(M_0 \cong S^2)$$

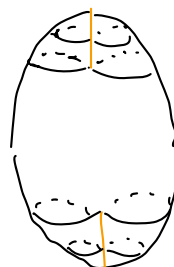


$$N_g := \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_g$$

$$g=1$$



$$g=2$$



PROP 2

generatori $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$

$$\pi_1(M_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g} / N$$

N il sottogruppo normale generato da $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

generatori $a_1, \dots, a_g$

$$\pi_1(N_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_g$$

N il sottogruppo normale generato da $a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$.

Prima di dimostrare la Proposizione, deduciamo il

COR 1 Se $g \neq h$, allora

$$M_g \not\cong M_h \text{ e } N_g \not\cong M_h. \quad (+)$$

Inoltre $M_g \cong N_h$ solo se $g=h=0$.

DIM Per dimostrare (†) è sufficiente verificare che i gruppi fondamentali non sono isomorfi. Lo si vede facilmente passando agli abelianizzati. $\square$

Per dimostrare la Prop. 2 è conveniente introdurre la nozione di CW complesso, un modo molto efficiente di descrivere spazi topologici.

DEF 2 Una decomposizione cellulare (finita) di uno spazio topologico X è una catena di sottospazi chiusi

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$$

con le seguenti proprietà:

1. X_0 è uno spazio discreto.
2. Se $0 < k < n$, allora X_k si ottiene da X_{k-1} attaccando palle di dimensione k , cioè

$$X_k \cong \left(X_{k-1} \amalg \coprod_{\alpha} D_{\alpha}^k \right) / \sim \quad \text{dove}$$

$\sim$ è la relazione di equivalenza generata nel seguente modo:

per ogni D_{α}^k è data

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{\alpha}: \partial D_{\alpha}^k & \longrightarrow & X_{k-1} \\ \parallel & & \\ S^{k-1} & & \end{array}$$

continua, e

$$\partial D_{\alpha}^k \ni x \sim \varphi_{\alpha}(x) \in X_{k-1}.$$

(Oss: per alcuni k può essere che la famiglia $\{D_\alpha^k\}$ sia vuota, in questo caso $X_k = X_{k-1}$.)

Un CW complesso è uno spazio topologico che ammette una decomposizione cellulare.

Notazione In una decomp. cell. le celle sono le "palle aperte" $e_\alpha^k = \text{Int}(D_\alpha^k)$

Esempio 5 $X = S^n$ ha una decomposizione cellulare
 $\{[0, -1, 0, 1]\} \subset S^n$ (c'è $X_0 = X_1 = \dots = X_{n-1}$)
 $\parallel$ $\parallel$
 X_0 X_n

Esempio 6 $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha una decomposizione cellulare
 $\{[0, -1, 0, 1]\} \subset \{[0, \cdot, 0, *, *]\} \subset \dots \subset \{[0, 0, \overbrace{*, \dots, *}^{k+1}]\} \subset \dots \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
 $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 X_0 X_2 X_k X_n

Esempio 7 $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha una decomposizione cellulare
 $\{[0, -1, 0, 1]\} \subset \{[0, \cdot, 0, *, *]\} \subset \dots \subset \{[0, 0, \overbrace{*, \dots, *}^{k+1}]\} \subset \dots \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
 $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 X_0 X_2 X_{2k} X_{2n}

(C'è $X_{2k+1} = X_{2k}$.)

Oss. 1 Una decomposizione cellulare è tanto più utile quanto minore è il numero delle celle.

Esempio 8

Diamo una decomposizione cellulare di M_g :

$$\{pt\} \subset \underbrace{\mathcal{S}^1 v \cdot v \mathcal{S}^1}_{2g} \subset M_g$$

dove $M_g = \left(\underbrace{\mathcal{S}^1 v \cdot v \mathcal{S}^1}_{2g} \amalg D^2 \right) / \sim$ con

$$\begin{matrix} 2D^2 \\ \parallel \\ \mathcal{S}^1 \end{matrix} \xrightarrow{\varphi} \underbrace{\mathcal{S}^1 v \cdot v \mathcal{S}^1}_{2g} \quad \text{definita così:}$$

Denotiamo i cerchi $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$
Ciascuno è stato orientato
(senso di percorrenza)

