1. Il gruppo fondamentale delle superfici compatte.

PROP 1

generatori $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$

$$\pi_1(M_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g} \big/ N$$

N il sottogruppo normale generato da $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

generatori $a_1, \dots, a_g$

$$\pi_1(N_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{g}$$

N il sottogruppo normale generato da $a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$.

Per dimostrare la Prop. 1 è conveniente introdurre la nozione di CW complesso, un modo di descrivere spazi topologici. (Vedi [A. Hatcher, p.7].)

DEF 1 Una <u>decomposizione cellulare</u> (finita) di uno spazio topologico X è una catena di sottospazi chiusi

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$$

con le seguenti proprietà:

1. X_0 è uno spazio discreto.
2. Se $0 < k \leq n$, allora X_k si ottiene da X_{k-1} attaccando palle di dimensione k, cioè

$$X_k \cong \left(X_{k-1} \amalg \coprod_{\alpha} D_\alpha^k \right) \big/ \sim \qquad \text{dove}$$

$\sim$ è la relazione di equivalenza generata nel seguente modo:

per ogni D_α^k è data da un'<u>applicazione di incollamento</u> continua, e

$$\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^k \longrightarrow X_{k-1}$$
$$\partial D_\alpha^k \cong S^{k-1}$$

$$\partial D_\alpha^k \ni x \rightsquigarrow \varphi_\alpha(x) \in X_{k-1}.$$

(Nota: per alcuni k la famiglia $\{D_\alpha^k\}$ può essere vuota, in questo caso $X_k = X_{k-1}$.)

Un <u>CW complesso</u> è uno spazio topologico che ammette una decomposizione cellulare.

<u>Notazione</u> In una decomp. cellulare le <u>celle</u> sono le "palle aperte" $e_\alpha^k := \mathrm{Int}(D_\alpha^k)$.

<u>OSS 1</u> In una decomposizione cellulare $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$, X_0 non è vuoto.

<u>Esempio 1</u> $X = S^n$ ha una decomposizione cellulare

$$\underset{X_0}{\{[0,\dots,0,1]\}} \subset \underset{X_n}{S^n} \quad (\text{cioè } X_0 = X_1 = \dots = X_{n-1})$$

con un'unica cella di di di dim $= n$, e appl. di incollamento

$$\partial D^n \longrightarrow X_0 \quad \text{costante}$$

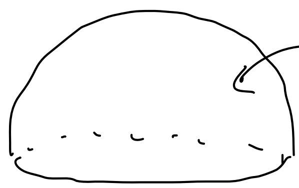
Figura 

Esempio 2 $X=\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha una decomposizione cellulare

$$\underset{X_0}{\underset{\|}{\{[1,0,\dots,0]\}}} \subset \underset{X_1}{\underset{\|}{\{[*,*,0,\dots,0]\}}} \subset \dots \subset \underset{X_k}{\underset{\|}{\{[\overbrace{*,\dots,*}^{k+1},0,\dots,0]\}}} \subset \dots \subset \underset{X_n}{\underset{\|}{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}}$$

con 1 cella in ogni dim $\in\{0 \dots n\}$, e applicazione d'incollamento data da:

$$D^k \cong \{(x_0,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^{k+1} \mid \|x\|=1,\ x_k\geq 0\}$$



$$\partial D^k = \{(x_0,\dots,x_{k-1},0)\in\mathbb{R}^{k+1} \mid \|x\|=1\} \longrightarrow X_{k-1}$$

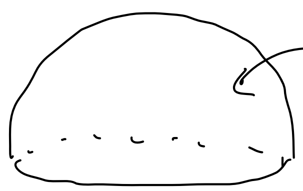
$$(x_0,\dots,x_{k-1},0) \longmapsto [x_0,\dots,x_{k-1},0,\dots,0]$$

Esempio 3 $X=\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha una decomposizione cellulare

$$\underset{X_0}{\underset{\|}{\{[1,0,\dots,0]\}}} \subset \underset{X_2}{\underset{\|}{\{[*,*,0,\dots,0]\}}} \dots \subset \underset{X_{2k}}{\underset{\|}{\{[\overbrace{*,\dots,*}^{k+1},0,\dots,0]\}}} \subset \dots \subset \underset{X_{2n}}{\underset{\|}{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}}$$

(Cioè $X_{2k+1}=X_{2k}$.) con una cella in ogni dimensione pari tra 0 e $2n$ (e nessuna altra cella). L'applicazione d'incollamento è analoga a quella dell'Esempio 2:

$$D^{2k} \simeq \{(z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \mid \|z\|=1,\ z_k \in \mathbb{R}\ \ z_k \geq 0\}$$



$$\partial D^{2k} = \{(z_0, \dots, z_{k-1}, 0) \in \mathbb{C}^{k+1} \mid \|z\| = 1\} \longrightarrow X_{2k-2}$$

$$(z_0, \dots, z_{k-1}, 0) \longmapsto [z_0, \dots, z_{k-1}, 0, \dots, 0]$$

Esempio 4 Una decomposizione cellulare di $X = \mathbb{R}$ è

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}}_{\substack{\| \\ X_0}} = \{\tfrac{1}{2} + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}\} \subset \underset{\substack{\| \\ X_1}}{\mathbb{R}}$$

Le celle sono indicizzate da $\mathbb{Z}$. Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$\partial D^1_\alpha = \{-1, +1\} \xrightarrow{\varphi^1_\alpha} X_0$$

$$i \longmapsto \alpha + \frac{i}{2}$$

Oss. 2 Una decomposizione cellulare è tanto più utile quanto minore è il numero delle celle.

Non resistiamo alla tentazione di enunciare il seguente

TEOREMA 1 Siano

$$Y_\bullet : Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n = X \quad \text{e} \quad Z_\bullet : Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_m = X$$

decomposizioni cellulari dello stesso spazio (segue che $m=n$, ma noi sappiamo dimostrarlo solo se $n \in \{0,1,2\}$ o $m \in \{0,1,2\}$), ciascuna con un insieme finito di celle. Siano

$$c(Y_\bullet)_m := \#\{m \text{ celle di } Y_\bullet\}$$

$$c(Z_\bullet)_m := \#\{m \text{ celle di } Z_\bullet\}$$

Allora

$$\sum_m (-1)^m c(Y_\bullet)_m = \sum_m (-1)^m c(Z_\bullet)_m$$

Non dimostreremo il Teorema 1.

Esempio 5 Ogni poliedro regolare dà una decomposizione cellulare di S^2 con

$\{0\text{-celle}\} = \{\text{vertici}\}$, $\{1\text{-celle}\} = \{\text{spigoli "aperti"}\}$

$\{2\text{-celle}\} = \{\text{facce "aperte"}\}$.

Quindi $\#\{\text{vertici}\} - \#\{\text{spigoli}\} + \#\{\text{facce}\}$ è indipendente dal poliedro (ed è uguale a 2).

Esempio 6 Diamo una decomposizione cellulare di $X = M_g$:

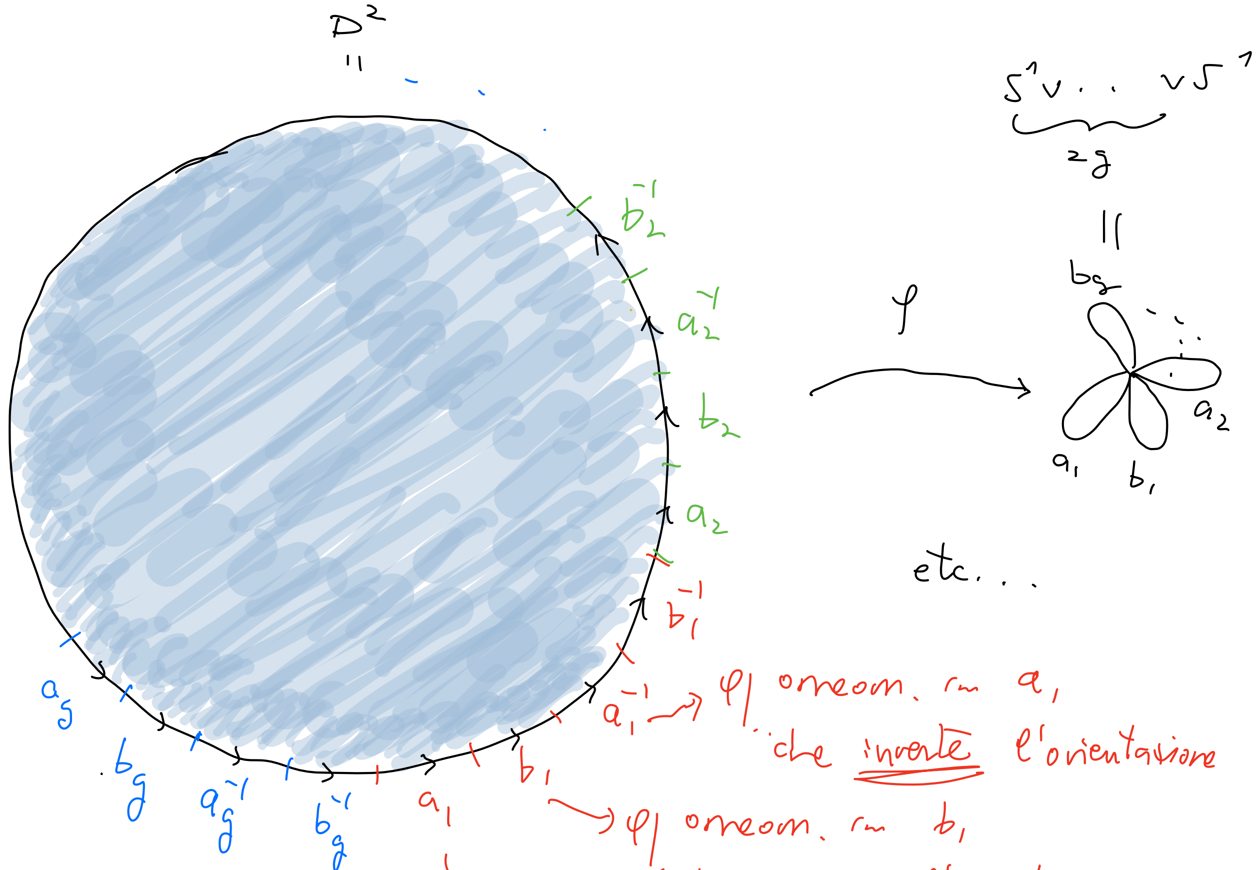
$$\underset{X_0}{\{p\}} \subset \underset{X_1}{\overbrace{\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}}^{2g}} \subset \underset{X_2 = X}{M_g}$$

$$M_g = \left(\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g} \amalg D^2 \right) \Big/ \sim \qquad (\ast)$$

con $\underset{S^1}{\partial D^2} \xrightarrow{\varphi} \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g}$ definita così:

Denotiamo i cerchi $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$

ciascuno è stato orientato (senso di percorrenza)



etc. . .

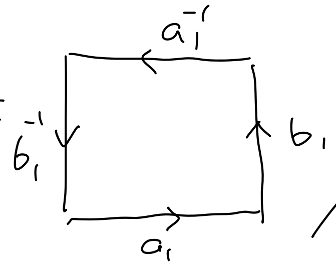
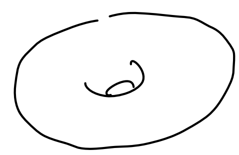
$a_1^{-1} \to \varphi|$ omeom. su a_1 ... che <u>inverte</u> l'orientazione

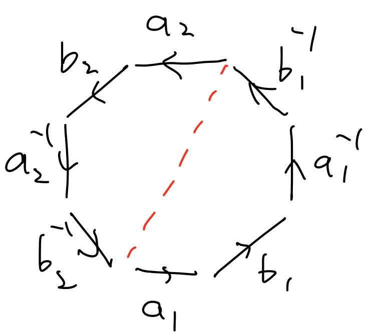
$b_1 \to \varphi|$ omeom. su b_1 ... che <u>rispetta</u> l'orientazione

$a_1 \to \varphi|$ ... dà omeomorfismo su a_1 che <u>rispetta</u> l'orientazione

Per convincerci che M_g ha questa decomposizione cellulare, partiamo dallo sp. top. X_g dato dal quoziente in (•), e facciamo vedere che è omeomorfo a M_g.

$g=0$: $X_0 \cong S^2$ banale

$g=1$: $X_1 =$  $/\sim$ $\cong$  ok.

$g=2$: $X_2 =$ 

taglio e vedo che

$X_2 \cong X_1 \# X_1 = T^2 \# T^2 = M_2$

$g>2$: simile a $g=2$ (o per induzione).

Dimostrazione dell'isomorfismo

generatori $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$

$$\pi_1(M_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{2g} \big/ N$$

N. il sottogruppo normale generato da $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ (*)

La decomposizione cellulare di M_g dà gli aperti

$$A := e^2 \subset M_g$$

$$B := \left(e^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \cup \underset{\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g}}{\overset{\shortparallel}{X_1}}$$

Abbiamo

$$A \cap B \cong e^2 \setminus \{(0,0)\},$$

quindi $A \cap B$ è connesso per archi. Sia $x_0 \in A \cap B$.

Siano

$$A \cap B \xhookrightarrow{i_A} A \qquad A \cap B \xhookrightarrow{i_B} B$$

le inclusioni.

Per Van Kampen, abbiamo un isomorfismo

$$\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0) \big/ N \xrightarrow{\sim} \pi_1(M_g),$$

dove $N \triangleleft \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)$ è il sottogruppo normale generato

degli elementi

$$i_A(\gamma)^{-1} i_B(\gamma) \qquad \gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)$$

Abbiamo

$\pi_1(A,x_0)$ banale

$\pi_1(B,x_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{2g}$ perché $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g}$ è un retratto di deformazione di B

$\pi_1(A \cap B, x_0) \cong \mathbb{Z}$ perché $A \cap B$ è omotopicamente equivalente a S^1.

Perciò otteniamo un isomorfismo

$$\pi_1(B,x_0) \big/ \bar{N} \xrightarrow{\sim} \pi_1(M_g)$$

dove $\bar{N} \triangleleft \pi_1(B,x_0)$ è il sottogr. normale generato da $i_B(\gamma)$, γ generatore di $\pi_1(A \cap B, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Si ha

$$i_3(\gamma) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

(o il suo inverso), e questo dà l'isomorfismo in (✡). $\square$

Per dimostrare l'isomorfismo

generatori $a_1, \dots, a_g$

$$\pi_1(N_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{g} \Big/ N$$

N il sottogruppo normale generato da $a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$.

si procede in modo simile, a partire dalla decomposizione cellulare

$$\begin{array}{ccccc} \{p\} & \subset & \overbrace{\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}}^{g} & \subset & N_g \\ \| & & \| & & \| \\ X_0 & & X_1 & & X_2 = X \end{array}$$

(•)

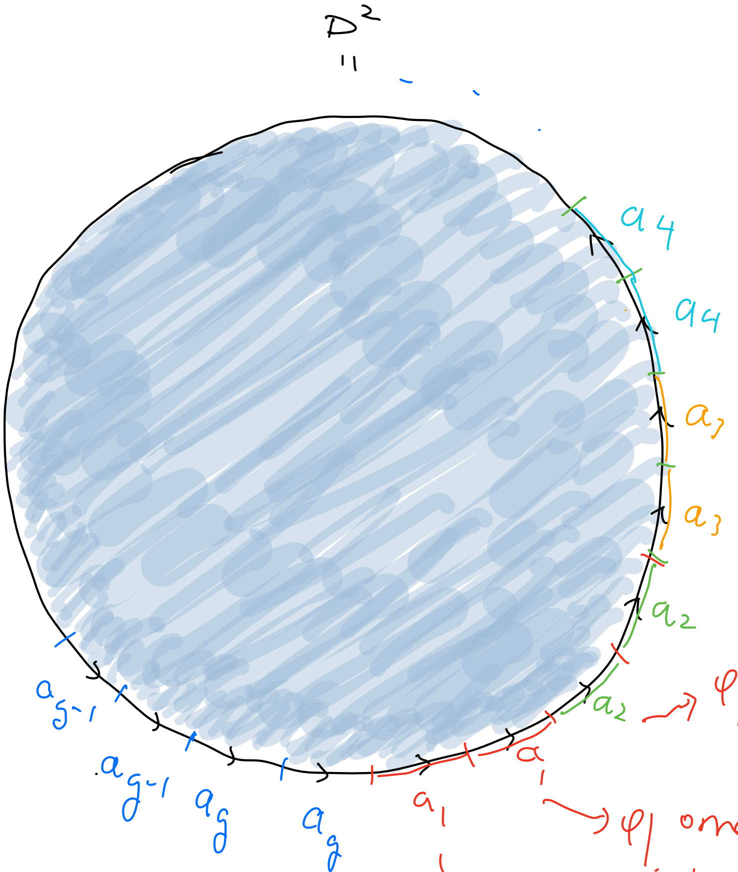
$$N_g = \Big(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{g} \amalg D^2\Big)\Big/\sim$$

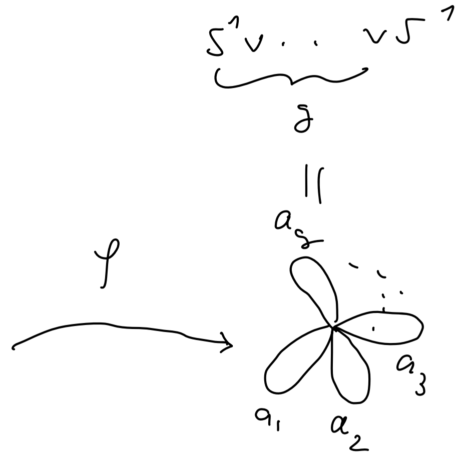
con

$$\begin{array}{ccc} \partial D^2 & \xrightarrow{\varphi} & \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{g} \\ \| & & \\ S^1 & & \end{array}$$

definita così:

Denotiamo i cerchi $a_1, a_2, \dots, a_g$, ciascuno è stato orientato (senso di percorrenza)





etc. . .

$\varphi|_{..}$ omeom. su a che rispetta l'orientazione

$\varphi|_{..}$ omeom. su b_1 che rispetta l'orientazione

$\varphi|_{..}$ dà omeomorfismo su a_1 che rispetta l'orientazione