1. Rivestimenti

DEF 1 Un'applicazione continua
$$X \xrightarrow{p} Y$$
tra spazi topologici è un <u>rivestimento</u> se, per ogni $y_0 \in Y$, esiste un aperto $V \subset Y$ contenente y_0 tale che
$$p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i, \text{ dove ciascun } U_i \text{ è aperto in } X, \qquad (*)$$
e
$$\forall i \in I \text{ l'applicazione } \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & p(x) \end{array} \text{ è un omeomorfismo.} \qquad (**)$$
Un aperto $V \subset Y$ tale che valgono $(*)$ e $(**)$ si dice <u>banalizzante</u>.

OSS 1 Un'applicazione continua $X \xrightarrow{p} Y$ è un rivestimento se Y ammette un ricoprimento costituito da aperti banalizzanti.

Esempio 1 L'applicazione
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$
è un rivestimento. Infatti se $a \in S^1$, allora $S^1 \setminus \{a\}$ è un aperto ben rivestito.

Esempio 2 L'applicazione esponenziale
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$
è un rivestimento. Notate che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z \end{aligned}$$

non è un rivestimento.

Esempio 3 L'identità $X \xrightarrow{Id} X$ è (banalmente) un rivestimento.

Esempio 4 Sia F uno spazio topologico discreto. La proiezione

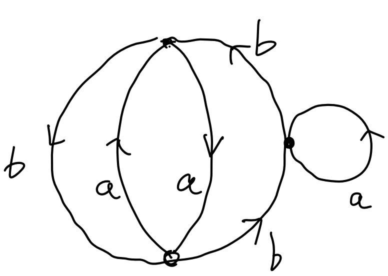
$$\begin{aligned} F \times Y &\longrightarrow Y \\ (f, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

è un rivestimento.

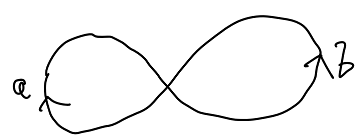
Esempio 5 L'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

Esempio 6 Gli esempi di rivestimenti dati finora sono molto simmetrici (vedremo come rendere precisa questa "sensazione"). Diamo un esempio di rivestimento che non è simmetrico:



X



$Y = S^1 \vee S^1$

DEF 2 Siano $p: X \to Z$ e $q: Y \to Z$ rivestimenti dello spazio topologico Z. Un <u>morfismo</u> dal rivestimento p al rivestimento q è un'applicazione continua

$$X \xrightarrow{f} Y$$

tale che $q \circ f = p$. In altre parole è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Il morfismo è un <u>isomorfismo</u> di rivestimenti se f è un omeomorfismo.

Se $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, con $p(x_0) = q(x_0) = z_0 \in Z$ (e quindi (X, x_0), (Y, y_0) e (Z, z_0) sono spazi topologici puntati), diciamo che p e q sono <u>rivestimenti di spazi topologici puntati</u>, e diciamo che f è un un <u>morfismo di spazi topologici puntati</u>.

Esempio 7 Per $n \in \mathbb{Z}$, sia

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

Se n è un multiplo di m esiste il morfismo di rivestimenti

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[rr, "f"', "z \mapsto z^{n/m}"] \arrow[dr, "p_n"'] & & \mathbb{C}^* \arrow[dl, "p_m"] \\ & \mathbb{C}^* & \end{tikzcd}$$

2. Rivestimenti e gruppo fondamentale (TRAILER)

Dimostreremo che

I. Se $p:(X,x_0)\to(Z,z_0)$ è un rivestimento, allora l'omomorfismo

$$\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{p_*}\pi_1(Z,z_0)$$

è iniettivo.

II. Supponiamo che (Z,z_0) sia connesso per archi.

Se Y soddisfa la seguente (debole)

IPOTESI $\quad Z$ è localmente connesso per archi, cioè ogni $z_0\in Z$ ha un sistema fondamentale di intorni connessi per archi, ed è anche semilocalmente semplicemente connesso, cioè ogni $z_0\in Z$ ha un intorno connesso per archi U tale che l'omomorfismo

$$\pi_1(U,y)\to\pi_1(Z,z_0)$$

sia banale,

allora c'è una corrispondenza biunivoca tra i rivestimenti

$$(X,x_0)\xrightarrow{p}(Z,z_0)$$

con X connesso per archi modulo l'isomorfismo puntato, e i sottogruppi $H < \pi_1(Z, z_0)$. La corrispondenza è data dall'applicazione che associa al rivestimento p il sottogruppo

$$H := p_* \pi_1(X, x_0).$$

Inoltre esiste un morfismo

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, y_0) \arrow[dl, "q"] \\
& (Z, z_0) &
\end{tikzcd}$$

di tali rivestimenti se e solo se

$$p_* \pi_1(X, x_0) < q_* \pi_1(Y, y_0)$$

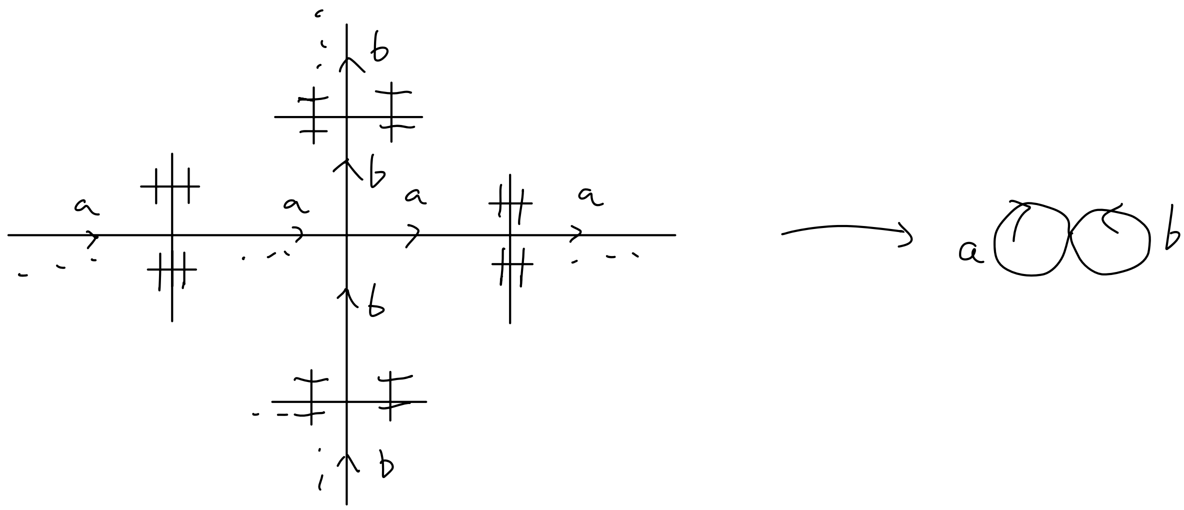
In particolare esiste un <u>rivestimento universale</u> $p : X \to Z$, cioè con X semplicemente connesso, che "domina" tutti gli altri rivestimenti.

<u>Esempio 8</u> $\mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^*$ dato da $p(z) = e^z$ è "il" rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$.

<u>Esempio 9</u> "Il" rivestimento universale di S^1 è

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

Esempio 10 Il rivestimento universale di $S^1 \vee S^1$ è una "croce infinita" (antenna?)



Sia $p: X \to Y$ un rivestimento.

DEF 3 Un <u>automorfismo</u> del rivestimento p è un isomorfismo di rivestimenti

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

L'identità Id_X è un automorfismo di p, la composizione di automorfismi di p è un automorfismo di p, e l'inverso di un automorfismo di p è un automorfismo di p.

Quindi

$$\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y) := \{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ automorfismo di } p\}$$

è un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di X.

Esempio 11 Se

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\xrightarrow{p} \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\xrightarrow{f_k} \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto e^{\frac{2\pi i}{n}k} \end{aligned}$$

è un automorfismo di p per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Si vede che

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^* \xrightarrow{p} \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}/(n)$$

Esempio 12 Se $p: X \to S^1 \vee S^1$ è il rivestimento dell'Esempio 6, allora $\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y) = \mathrm{Id}_X$

Esempio 13 Se

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{p} S^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

allora

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1) = \{ f_a \mid f_a(t) = t+a,\ a \in \mathbb{Z} \} \underset{\text{come gruppi}}{\cong} \mathbb{Z}$$

Infatti è chiaro che $f_a \in \mathrm{Aut}(\cdot\cdot)$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$.

Viceversa, se $g \in Aut(\cdot\cdot)$, allora $(g(t)-t) \in \mathbb{Z}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e siccome $g(t)-t$ è funzione continua di t, segue che $g(t)-t$ è costante.

Dimostreremo

III. Sia $X \xrightarrow{p} Y$ "il" rivestimento universale di uno spazio topologico connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Allora

$$Aut(X \xrightarrow{p} Y) \cong \pi_1(Y) \qquad (*)$$

OSS 2 L'isomorfismo in $(*)$ generalizza l'isomorfismo

$$\pi_1(S^1) \cong Aut(\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1)$$

che è stato dimostrato (senza formularlo così) quando abbiamo calcolato $\pi_1(S^1)$.

3. Proprietà di sollevamento

Sia $p : X \to Z$ un rivestimento.

DEF 4 Sia $f : Y \to Z$ un'applicazione (continua). Un sollevamento di f è un'applicazione (continua) $\tilde{f} : Y \to X$ t.c. $p \circ \tilde{f} = f$. In altre parole il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \qquad (\circ)$$

Se $(X, x_0) \xrightarrow{p} (Z, z_0)$ e $(Y, y_0) \xrightarrow{f} (Z, z_0)$ un sollevamento è un'appl. (continua) $(Y, y_0) \xrightarrow{\tilde{f}} (X, x_0)$ t.c. $(\circ)$ sia commutativo.

Esempio 14 Dato un rivestimento $p : X \to Z$, un sollevamento di p è un morfismo da $p : X \to Z$ a se stesso.

PROP 1 Sia $p: X \to Z$ un rivestimento. Siano Y uno sp. top. connesso, $f: Y \to Z$ un'appl. (continua), e $f_1, f_2: Y \to X$ due sollevamenti di f. Allora

$$\{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\}$$

è vuoto oppure è tutto Y.

Per dimostrare la Prop. 1 introduciamo della notazione:

$$X \times_Z X := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid p(x_1) = p(x_2)\}.$$

Chiaramente la diagonale

$$\Delta_X := \{(x, x) \in X \times X\}$$

è contenuta in $X \times_Z X$.

Lemma 1 Δ_X è un sottoinsieme chiuso e aperto di $X \times_Z X$.

DIM Vedi [Manetti, Lemma 12.24, p. 225].

Dimostrazione della Prop 2. Abbiamo l'appl. continua

$$\begin{aligned} Y &\xrightarrow{\Phi} X \times_Z X \\ y &\longmapsto (f_1(y), f_2(y)) \end{aligned}$$

e

$$\{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\} = \Phi^{-1}(\Delta_X) \qquad (+)$$

Quindi il membro di sinistra di $(+)$ è aperto e chiuso per il Lemma 1, e la proposizione segue perché Y è connesso. $\square$