

1. Sollevamenti

PROP 2 Sia $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento.

I. Sia

$$(\mathbb{I}, 0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

(continua), e sia $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Esiste un sollevamento

$$\begin{array}{ccc} & (X, x_0) & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow & \\ (\mathbb{I}, 0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

ed $\tilde{f}$ unico.

II. Sia

$$I \times I \xrightarrow{F} Y$$

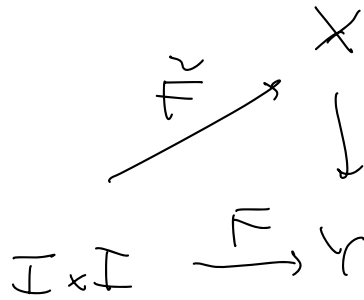
(continua), sia

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f_0} & Y \\ s & \longmapsto & F(s, 0) \end{array}$$

e sia

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \tilde{f}_0 \nearrow & \downarrow & \\ I & \xrightarrow{f_0} & Y \end{array}$$

un sollevamento di f_0 . Allora esiste un sollevamento di F con dato iniziale $\tilde{f}_0$, cioè



(continua) tale che

$$\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}_0(s) \quad \forall s \in I$$

Inoltre tale sollevamento è unico.

DIM L'unicità segue dalla Prop. 2, p. 20 5/5/2023.

Il resto della dimostrazione è del tutto analogo a quello che si è fatto nel caso del rivestimento

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{p} S^1 \\ s &\longmapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s). \end{aligned}$$

□

Notazione Sia $\alpha: I \rightarrow Y$ un cammino, e sia $x_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$.

Indichiamo con $\alpha_{x_0}: I \rightarrow X$ il sollevamento di α tale che $\alpha_{x_0}(0) = x_0$.

2. Monodromia

In questa sezione

$$X \xrightarrow{p} Y$$

è un rivestimento. Siano $y_0, y_1 \in Y$. Abbiamo l'applicazione

$$\tilde{p}^{-1}(y_0) \times \Omega(Y, y_0, y_1) \longrightarrow \tilde{p}^{-1}(y_1)$$

$$(x_0, \alpha) \longmapsto x_0 \alpha := \alpha_{x_0}(1)$$

PROP 2 Siano $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y_1)$ e $\beta \in \Omega(Y, y_1, y_2)$.

Se $x_0 \in \tilde{p}^{-1}(y_0)$, allora

$$(x_0 \alpha) \beta = x_0 (\alpha * \beta)$$

DIM Sia $x_1 = \alpha_{x_0}(1)$. Quindi

$$(x_0 \alpha) \beta = \beta_{x_1}(1).$$

La giunzione $\alpha_{x_0} * \beta_{x_1}$ (che ha senso perché $\alpha_{x_0}(1) = x_1$ e $\beta_{x_1}(0) = x_1$) è un sollevamento di $\alpha * \beta$ tale che $\alpha_{x_0} * \beta_{x_1}(0) = x_0$, e quindi

$$\alpha_{x_0} * \beta_{x_1} = (\alpha * \beta)_{x_0}$$

Perciò

$$x_0(\alpha \circ \beta) = \alpha_{x_0} * \beta_{x_1}(1) = (x_0 \alpha) \beta.$$

□

PROP 3 Siano $y_0, y_1 \in Y$ e $x_0 \in \tilde{p}^{-1}(y_0)$. Se $\alpha, \beta \in \Omega(x_0, y_1)$ sono cammini omotopi, allora

$$x_0 \alpha = x_0 \beta.$$

DIM Segue dalla Prop. 2.

□

In particolare, se $y_0 \in Y$, abbiamo un'applicazione ben definita

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{-1}(y_0) \times \pi_1(Y, y_0) &\longrightarrow \tilde{p}^{-1}(y_0) \\ (x_0, [\alpha]) &\longmapsto x_0 \alpha \end{aligned}$$

PROP 4 Siano $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $y_0 = p(x_0)$.

L'omomorfismo

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(Y, y_0)$$

è iniettivo, e

$$p_* \pi_1(X, x_0) = \{ [\alpha] \in \pi_1(Y, y_0) \mid x_0 \alpha = x_0 \}. \quad (*)$$

DIM Sia $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Se $p_*([\alpha]) = 1$, allora

esiste un'omotopia

$$p \circ \alpha \sim I_{Y_0},$$

data da un'applicazione continua

$$I \times I \xrightarrow{F} Y$$

tale che

$$\left. \begin{aligned} F(s, 0) &= p \circ \alpha(s) \\ F(s, 1) &= y_0 \end{aligned} \right\} \forall s \in I$$

$$F(0, t) = F(1, t) = y_0 \quad \forall t \in I$$

Per la Prop. 2 esiste un sollevamento dell'omotopia F con dato iniziale α , cioè un'applicazione continua

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \tilde{F} \nearrow & \downarrow p & \\ I \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & Y \end{array}$$

tale che

$$\tilde{F}(s, 0) = \alpha(s) \quad \forall s \in I.$$

In particolare $\tilde{F}(0, 0) = x_0$. Per unicità del sollevamento

$$\tilde{F}(0, t) = \tilde{F}(1, t) = x_0 \quad \forall t \in I.$$

$$\tilde{F}(s, 1) = x_0 \quad \forall s \in I$$

Quindi $\alpha \sim 1_{X_0}$. Questo dimostra che p_* è iniettivo.

L'uguaglianza in (*) si dimostra in modo analogo. $\square$

