

1. Monocromia (continuazione).

Notazione Se $p: X \rightarrow Y$ è un rivestimento, $x_0 \in X$ e $y_0 = p(x_0)$.

poniamo

$$p_* \pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) \leq \pi_1(Y, y_0).$$

PROP 1 Siano $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $y_0 = p(x_0)$.

Siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$. Allora

$$x_0 \alpha = x_0 \beta \quad (\blacksquare)$$

se e solo se α, β appartengono alla stessa laterale destra di $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(Y, y_0)$, cioè esiste $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che

$$[\beta] = [\gamma] \cdot [\alpha] \quad (\odot)$$

DM Supponiamo che valga $(\odot)$, cioè $\beta \sim \gamma * \alpha$.

Allora

$$x_0 \beta = x_0 (\gamma * \alpha) = (x_0 \gamma) \alpha = x_0 \alpha$$

↑
per (*)

Ora supponiamo che valga $(\blacksquare)$. Siccome

$\bar{\alpha} * \alpha \sim 1_{y_0}$ abbiamo

$$x_0(\beta * \bar{\alpha}) = x_0(\alpha * \bar{\alpha}) = x_0(1_{y_0}) = x_0,$$

e quindi per (*) della Prop. 4, abbiamo

$$[\beta] \cdot [\alpha]^{-1} \in \pi_1(X, x_0),$$

cioè esiste $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $[\beta] = [\gamma] \cdot [\alpha]. \square$

Se G è un gruppo e $H < G$ è un sottogruppo,
poniamo

$$H \backslash G := \{Hg \mid g \in G\} = \text{insieme dei laterali destri di } H$$

Per la Proposizione 2 abbiamo un'applicazione ben definita

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(X, x_0) \setminus \pi_1(Y, y_0) & \longrightarrow & \tilde{p}^{-1}(x_0) \\ [\alpha] & \longmapsto & \alpha_{x_0}(1) \end{array} \quad (+)$$

PROP 2 Siano $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento, e supponiamo che X sia connesso per archi. Siano $x_0 \in X$ e $y_0 := p(x_0)$. L'applicazione in (†) è biiettiva.

DIM L'applicazione in (†) è iniettiva per il Corollario 1. Rimane da dimostrare che è suriettiva. Sia $x_1 \in p^{-1}(y_0)$. Siccome X è connesso per archi esiste un cammino $\gamma: I \rightarrow X$ tale che

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x_1.$$

Sia $\alpha = p \circ \gamma$. Allora $x_0 \alpha = x_1$. □

OSS 1 Sia $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento connesso, sia $x_0 \in X$ e $y_0 = p(x_0)$. Per la Prop 2 la cardinalità di $\pi_1(Y, y_0)$ è maggiore o uguale della cardinalità di $p^{-1}(x_0)$, ed è uguale a $|p^{-1}(x_0)|$ se X è semplicemente connesso.

ESEMPIO 1 Sia

$$X := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| = 1\} \cong S^3.$$

Siano $n \in \mathbb{N}_+$ e $\omega_n := e^{2\pi i/n}$. Abbiamo il rotogruppo

$$\mathbb{Z}/(n) \hookrightarrow \text{Omeo}(X)$$

$$[a] \longmapsto \{z \mapsto \omega_n^a z\}$$

Siano

$$Y := X / \mathbb{Z}/(n)$$

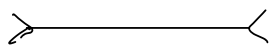
e

$$p: X \rightarrow Y$$

l'applicazione quoziente. Nel caso $n=2$ abbiamo l'applicazione quoziente $S^1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, si verifica (facilmente) che p è un rivestimento. Siccome $X \cong S^1$ è semplicemente connesso, deduciamo che

$$|\pi_1(Y)| = n.$$

Se n è primo segue che $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}/(n)$ (l'isomorfismo vale per qualsiasi n).



Sia $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento, con X connesso per archi.

Siano $x_0, x_1 \in X$, e sia $\gamma: I \rightarrow X$ un cammino con

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x_1.$$

Poniamo $y_0 = p(x_0)$ e $y_1 = p(x_1)$. Sia

$$\delta = p \circ \gamma.$$

Quindi $\delta: I \rightarrow Y$ è un cammino con

$$\delta(0) = y_0, \quad \delta(1) = y_1.$$

Consideriamo gli isomorfismi di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow[\sim]{T_\gamma} & \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] & \longmapsto & [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_1) & \xrightarrow[\sim]{T_\delta} & \pi_1(Y, y_0) \\ [\beta] & \longmapsto & [\delta * \beta * \bar{\delta}] \end{array}$$

Se $p = p \circ \alpha$, allora $\delta * \beta * \bar{\delta} = p \circ (\delta * \beta * \bar{\delta})$. Quindi gli isomorfismi sono compatibili con p_* , cioè abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow[\sim]{T_\gamma} & \pi_1(X, x_0) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y_1) & \xrightarrow[\sim]{T_\delta} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

In particolare T_γ e T_δ definiscono una corrispondenza biunivoca

$$\bar{p}^{-1}(x_1) = \pi_1(X, x_1) \setminus \pi_1(Y, y_1) \longleftrightarrow \pi_1(X, x_0) \setminus \pi_1(Y, y_0) = \bar{p}^{-1}(x_0)$$

COR 1 Se $p: X \rightarrow Y$ è un rivestimento con X e Y connessi per archi, allora la cardinalità di $\bar{p}^{-1}(y)$ è indipendente da $y \in Y$.

DIM Siano $y_0, y_1 \in Y$ e sia $\delta: I \rightarrow Y$ un cammino tale che

$$\delta(0) = y_0 \quad \delta(1) = y_1.$$

Sia $x_0 \in \tilde{p}^{-1}(y_0)$ e sia $\delta: I \rightarrow X$ un sollevamento di δ tale che $\delta(0) = x_0$. Poniamo $x_1 = \delta(1)$. Per quella che abbiamo visto sopra $|p^{-1}(x_1)| = |\tilde{p}^{-1}(x_0)|$. □

PROP 3 Sia $p: X \rightarrow Y$ un rivestimento. Se $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$, allora

$$\pi_1(X, x_0 \alpha) = [\alpha]^{-1} \cdot \pi_1(X, x_0) \cdot [\alpha],$$

cioè

$$p_* \pi_1(X, x_0 \alpha) = [\alpha]^{-1} \cdot p_* \pi_1(X, x_0) \cdot [\alpha].$$

DIM Notiamo che $\bar{\alpha}_{x_0}(0) = x_0 \alpha$ e $\bar{\alpha}_{x_0}(1) = x_0$. Quindi abbiamo un isomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0 \alpha) \\ [\gamma] &\longmapsto [\bar{\alpha}_{x_0} * \gamma * \alpha_{x_0}] \end{aligned}$$

Poniamo $x_1 = x_0 \alpha$ e

$$\phi_0: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \phi_1: \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

Abbiamo

$$p_*([\bar{\alpha}_{x_0} * \gamma * \alpha_{x_0}]) = [\alpha]^{-1} \cdot p_*([\gamma]) \cdot [\alpha].$$

□