1. Automorfismi di rivestimento.

Sia $p: X \to Y$ un rivestimento. Ricordiamo che il gruppo degli automorfismi del rivestimento p è il sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di X dato da

$$\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y) = \{ X \xrightarrow{\varphi} X \mid \varphi \text{ omeomorfismo e } p \circ \varphi = p \}$$

In altre parole, un omeomorfismo φ di X appartiene a $\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ se e solo se, per ogni $y \in Y$ $\varphi(p^{-1}(y)) = p^{-1}(y)$.

PROBLEMA 1 Determinare $\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ a partire dalla inclusione di gruppi

$$\pi_1(X, x_0) < \pi_1(Y, y_0) \qquad x_0 \in X \quad y_0 = p(x_0).$$

Oss 1 Siccome $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ "vedono" solo le componenti connesse per archi di X e Y contenenti rispettivamente x_0 e y_0, assumeremo da ora in poi che X e Y sono connessi per archi.

Oss 2 Un automorfismo φ di $p: X \to Y$ è un sollevamento di p:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

Siccome X è connesso segue che φ è determinato dal valore $\varphi(x_0)$, che è un elemento di $p^{-1}(p(x_0))$.

In altre parole, abbiamo un'applicazione iniettiva

$$\begin{aligned} Aut(X \xrightarrow{p} Y) &\longrightarrow p^{-1}(y_0) \qquad y_0 := p(x_0) \\ \varphi &\longmapsto \varphi(x_0) \end{aligned}$$

Siccome abbiamo una identificazione naturale

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, y_0) &\longleftrightarrow p^{-1}(y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto x_0 \alpha \end{aligned}$$

abbiamo anche un'applicazione iniettiva

$$\begin{aligned} Aut(X \xrightarrow{p} Y) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, y_0) \qquad (\star) \\ \varphi &\longmapsto \text{Laterale } \pi_1(X, x_0)\alpha \text{ t.c.} \end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = x_0 \pi_1(X, x_0)\alpha$$

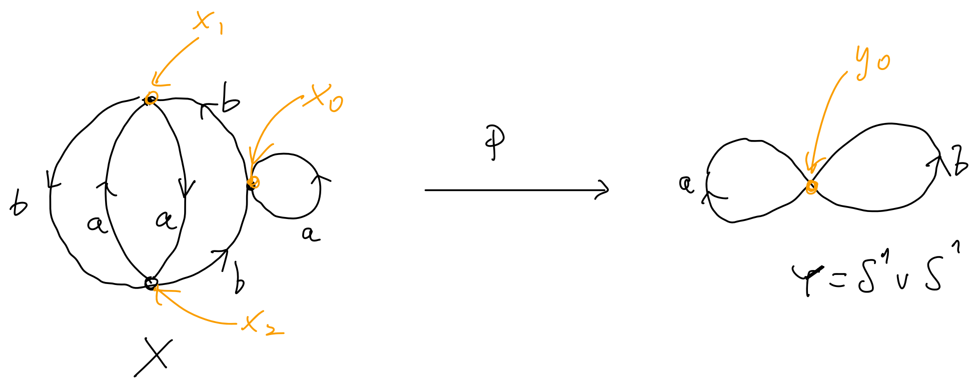
Esempio 1 Se

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{p} S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

allora l'applicazione in (✪) è biunivoca

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1) \longleftrightarrow \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}, a)}_{\cong \{0\}} \backslash \underbrace{\pi_1(S^1, 1)}_{\cong \mathbb{Z}}$$

Esempio 2 Sia



l'Esempio 6, p. 2 del 5/5/2023. In questo caso l'applicazione in (✪), cioè

$$\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, y_0)$$

non è suriettiva. Infatti $\pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, y_0)$ ha cardinalità 3 perché $|p^{-1}(y_0)| = 3$, ma $\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ è banale. Infatti supponiamo che $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$.

Siccome

$$p^{-1}(y_0) = \{x_0, x_1, x_2\},$$

φ deve permutare i punti x_0, x_1, x_2. Ma siccome x_0 è "diverso" da x_1, x_2, vale $\varphi(x_0) = x_0$, e quindi $\varphi = Id_X$.

—— <o> ——

Per enunciare la risposta al Problema 1, "ricordiamo" la seguente

DEF 1 Sia G un gruppo, e sia $H < G$ un suo sottogruppo. Il normalizzatore di H in G è

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Oss 4 $N_G(H)$ è un sottogruppo di G, e contiene H. Ovviamente H è un sottogruppo normale di $N_G(H)$, e quindi $N_G(H)/H$ è un gruppo, che può essere identificato con l'insieme dei laterali destri (o sinistri) di H contenuti in $N_G(H)$.

Esempio 3 Sia A un insieme, e sia $\mathcal{S}_A$ il gruppo delle permutazioni di A, cioè le applicazioni bijettive $\varphi : A \to A$. Sia $B \subset A$ e sia

$$Fix(B) := \{\varphi \in \mathcal{S}_A \mid \varphi(b) = b \text{ per ogni } b \in B\}.$$

Allora

$$N_{\mathcal{S}_A}(\mathrm{Fix}(B)) = \begin{cases} \{\varphi \in \mathcal{S}_A \mid \varphi(b) \in B \text{ per ogni } b \in B\} & \text{se } |A \setminus B| \geq 2 \\ \mathcal{S}_A & \text{se } |A \setminus B| < 2. \end{cases}$$

TEOREMA 1 Sia $p : X \to Y$ un rivestimento, con X e Y connessi per archi e localmente connessi per archi.
Allora l'applicazione iniettiva

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, y_0) \qquad (*) \\ \varphi &\longmapsto \text{Laterale } \pi_1(X, x_0)\alpha \text{ t.c.} \\ &\qquad\quad \varphi(x_0) = x_0\, \pi_1(X, x_0)\alpha \end{aligned}$$

è un isomorfismo tra $\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ e il gruppo

$$N_{\pi_1(Y, y_0)}(\pi_1(X, x_0)) \big/ \pi_1(X, x_0)$$

Dimostriamo il Teorema 1 in due passi.

PROP 2 L'immagine dell'applicazione in (*)

è contenuta in

$$N_{\pi_1(Y,y_0)}(\pi_1(X,x_0)) \Big/ \pi_1(X,x_0)$$

DIM L'osservazione (semplice) fondamentale è che, se $\gamma : I \to Y$ è un cammino, $\tilde{\gamma} : I \to X$ un suo sollevamento e $\phi \in Aut(X \xrightarrow{p} Y)$, allora anche $\phi \circ \tilde{\gamma}$ è un sollevamento di γ.

Sia $\phi \in Aut(X \xrightarrow{p} Y)$, e sia $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ tale che $\phi(x_0) = x_0 \alpha$. In altre parole, se $\tilde{\alpha} : I \to X$ è il sollevamento di α t.c. $\tilde{\alpha}(0) = x_0$, allora

$$\tilde{\alpha}(1) = \phi(x_0).$$

Ora sia $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Dobbiamo dimostrare che

$$\alpha * \underbrace{(p \circ \gamma)}_{\text{arbitrario elemento di } p_* \Omega(X, x_0, x_0)} * \bar{\alpha} \in p_* \Omega(X, x_0, x_0) \qquad (X)$$

Per l'osservazione fatta all'inizio $\varphi\circ\gamma$ è il sollevamento di $p\circ\gamma$ che inizia in $\varphi(x_0)$, quindi ha senso la giunzione di cammini in X

$$\tilde{\alpha} * (\varphi\circ\gamma) * \bar{\tilde{\alpha}}$$

Notiamo che

$$p\circ\left(\tilde{\alpha} * (\varphi\circ\gamma) * \bar{\tilde{\alpha}}\right) = (p\circ\tilde{\alpha}) * (p\circ(\varphi\circ\gamma)) * (p\circ\bar{\tilde{\alpha}}) = \qquad (+)$$

$$= \alpha * (p\circ\gamma) * \bar{\alpha}$$

Ma $\tilde{\alpha} * (\varphi\circ\gamma) * \bar{\tilde{\alpha}}$ è un laccio che inizia e finisce in x_0, quindi le uguaglianze in $(+)$ dimostrano che vale $(*)$. $\square$

Per dimostrare che ogni elemento di

$$N_{\pi_1(Y, y_0)}(\pi_1(X, x_0)) \big/ \pi_1(X, x_0)$$

è nell'immagine dell'applicazione in $(*)$ abbiamo bisogno di un criterio di sollevamento più generale.

PROP 2 Sia $p:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ un rivestimento, e sia $f:(T,t_0)\to(Y,y_0)$ un'applicazione (continua) con T connesso per archi e localmente connesso per archi. Esiste un sollevamento

$$\begin{tikzcd} & (X,x_0) \arrow[d, "p"] \\ (T,t_0) \arrow[ur, "\tilde f"] \arrow[r, "f"] & (Y,y_0) \end{tikzcd}$$

se e solo se

$$f_*\pi_1(T,t_0)\subset p_*\pi_1(X,x_0). \qquad (\blacksquare)$$

DIM Se $\tilde f$ esiste, allora

$$f_* = (p\circ\tilde f)_* = p_*\circ\tilde f_*,$$

e quindi vale $(\blacksquare)$. Ora supponiamo che valga $(\blacksquare)$, e definiamo $\tilde f$. Come motivazione della definizione che diamo, supponiamo che $\tilde f$ esista, e sia $t\in T$. Allora esiste un cammino $\gamma: I\to T$ da t_0 a t (perché T è connesso per archi), e il cammino

$\tilde{f} \circ \gamma : I \to X$ è il cammino con

$$\tilde{f} \circ \gamma(0) = x_0 \qquad \tilde{f} \circ \gamma(1) = \tilde{f}(t)$$

che solleva il cammino $f \circ \gamma : I \to Y$.

Con questa motivazione, definiamo $\tilde{f}$ come segue: sia $\gamma : I \to T$ un cammino da t_0 a t, e sia $\alpha : I \to X$ il sollevamento di $f \circ \gamma$ tale che

$$\alpha(0) = x_0 .$$

Poniamo

$$\tilde{f}(t) = \alpha(1).$$

A priori il valore $\tilde{f}(t)$ dipende dal cammino γ scelto. Si verifica che $\tilde{f}(t)$ non dipende da γ perché vale l'inclusione in (▨). Quindi abbiamo definito un'applicazione

$$Y \xrightarrow{\tilde{f}} X$$

Si ha

$$p \circ \tilde{f}(t) = p \circ \alpha(1) = (f \circ \gamma)(1) = f(t) .$$

Quindi $\tilde{f}$ solleva f. Si dimostra che, grazie all'ipotesi "T localmente connesso per archi", $\tilde{\ell}$ è continua. (Vedi [Manetti, Teor. 13,48].) $\square$

<u>PROP 3</u> L'immagine dell'applicazione in $(*)$ è contiene

$$N_{\pi_1(Y,y_0)}(\pi_1(X,x_0)) \Big/ \pi_1(X,x_0)$$

<u>DIM</u> Sia $\alpha \in N_{\pi_1(Y,y_0)}(\pi_1(X,x_0))$, e sia

$$x_1 = x_0\alpha.$$

Dobbiamo dimostrare che esiste $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ tale che $\varphi(x_0)=x_1$. Applichiamo la Prop. 2 a

$$\begin{tikzcd}
 & (X, x_1) \arrow[d, "p"] \\
(X, x_0) \arrow[ur, dashed, "\exists ?"] \arrow[r, "p"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

Per la Prop. 3 (2023-05-20, p. 6) abbiamo

$$p_*\pi_1(X,x_1) = \alpha^{-1}\cdot p_*\pi_1(X,x_0)\cdot\alpha = p_*\pi_1(X,x_0)$$

Prop. 3 (2023-05-10)

$\alpha \in N_{\pi_1(Y,y_0)}(\pi_1(X,x_0))$

Quindi esiste un sollevamento φ di $\tilde{p} : (X,x_0) \to (X,x_1)$.

Ragionando in modo analogo, vediamo che esiste un sollevamento

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x_0) \arrow[d, "p"] \\
(X,x_1) \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "p"] & (Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

Le composizioni $\varphi\circ\psi$ e $\psi\circ\varphi$ sono sollevamenti

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x_0) \arrow[d, "p"] \\
(X,x_0) \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "p"] & (Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

quindi, per unicità del sollevamento, sono l'identità.

Questo dimostra che $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$. $\square$

<u>DEF 2</u> Un rivestimento $p: X \to Y$ con X, Y connessi per archi, e X localmente connesso per archi, è <u>regolare</u> (o <u>di Galois</u>) se per ogni $x_0 \in X$ $p_* \pi_1(X, x_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y, p(x_0))$.
(Se è vero per un $x_0 \in X$, allora è vero per ogni $x_0 \in X$, vedi p. 5 2013-05-10.)

<u>OSS 5</u> Per quello che abbiamo dimostrato, $p: X \to Y$ è regolare se e solo se $\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ agisce transitivamente sulle fibre di p, cioè se per ogni $x_0, x_1 \in X$ t.c. $p(x_0) = p(x_1)$ esiste $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y)$ con $\varphi(x_0) = x_1$.

<u>OSS 6</u> Se X è semplicemente connesso, allora $p: X \to Y$ è regolare, e

$$\mathrm{Aut}(X \xrightarrow{p} Y) \cong \pi_1(Y).$$