

Geometria II, a. a. 2022-23

PROF. K. O'GRADY

Diario delle lezioni

14 giugno 2023

Settimana 1.

- (28/2/2023) Spazi metrici: ripasso. Spazi topologici. Esempi: spazio topologico associato a uno spazio metrico, topologia discreta e indiscreta, topologia cofinita. Convergenza di una successione in uno spazio topologico.
- (1/3/2023) Applicazioni continue tra spazi topologici. Topologia della semicontinuità superiore. Chiusi di una topologia. Topologia di Zariski. Base di uno spazio topologico.
- (3/3/2023) - 2 ore Da una collezione $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ a una topologia su X con base \mathcal{B} . Lo spazio topologico prodotto di due spazi topologici. Chiusura, parte interna, frontiera. Intorni, sistema fondamentale di intorni. La topologia di sottospazio.

Settimana 2.

- (7/3/2023) Correzione esercizi.
- (8/3/2023) Sottospazi aperti, chiusi, contenenti un intorno di un punto. Immersioni. Applicazioni aperte e chiuse. Teorema dell'invarianza del dominio (enunciato), curve di Peano. Spazi di Hausdorff.
- (10/3/2023) Connessione e connessione per archi. Decomposizione in componenti connesse.

Settimana 3.

- (14/3/2023) Correzione esercizi.
- (15/3/2023) Compattezza. Il prodotto di spazi compatti è compatto. Gruppi topologici.
- (17/3/2023) Lezione cancellata.

Settimana 4.

- (21/3/2023) Correzione esercizi (Simone Diverio).
- (22/3/2023) Lezione cancellata.
- (24/3/2023) Lezione cancellata.

Settimana 5.

- (28/3/2023) Varietà topologiche di dimensione n . Esempi: aperti in \mathbb{R}^n , S^n , zeri di funzioni C^1 su \mathbb{R}^{n+1} con ipotesi sul gradiente. Topologia su un insieme ottenuta incollando topologie sui sottoinsiemi di un ricoprimento. Topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(K)$ per $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.
- (29/3/2023) La topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(K)$, connessione e compattezza. Componenti connesse di una varietà topologica di dimensione n sono aperti (e quindi varietà topologiche di dimensione n). Il prodotto di varietà topologiche di dimensione m e n è una varietà topologica di dimensione $m + n$.
- (31/3/2023) Classificazione delle superfici connesse compatte a meno di omeomorfismo. Spazio quoziente. Esempi: spazi proiettivi reali e complessi. Identificazioni. Criterio necessario e sufficiente perchè il quoziente di uno spazio topologico modulo un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi sia di Hausdorff.

Settimana 6.

- (4/4/2023) Correzione esercizi.
- (5/4/2023) Primo e secondo assioma di numerabilità. Spazi topologici separabili. Punti di accumulazione di successioni. Chiusura di un sottoinsieme di uno spazio topologico primo-numerabile in termini di successioni. Compattezza e compattezza per successioni.

Settimana 7.

- (12/4/2023) Omotopia di cammini. Riparametrizzazioni di cammini. Giunzione di cammini. La giunzione è associativa a meno di omotopia. Cammino costante, cammino inverso e loro proprietà. Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato.
- (14/4/2023) Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi è indipendente (a meno di isomorfismo) dal punto base. Il gruppo fondamentale di S^1 è isomorfo a \mathbb{Z} . Applicazioni della descrizione del gruppo fondamentale di S^1 : il Teorema fondamentale dell'Algebra, il Teorema del punto fisso di Brouwer. Inizio della dimostrazione di $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$: riduzione alle proprietà di sollevamento di cammini e omotopie per l'applicazione $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ data da $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$.

Settimana 8.

- (18/4/2023) Correzione esercizi.
- (19/4/2023) Dimostrazione delle proprietà di sollevamento di cammini e omotopie per l'applicazione $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ data da $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Teorema di Borsuk-Ulam per S^2 . Una varietà topologica di dimensione 2 non è omeomorfa a una varietà topologica di dimensione diversa da 2.
- (21/4/2023) Proprietà functoriali di π_1 . Omotopia tra applicazioni ed equivalenza omotopica. Spazi topologici (connessi per archi) omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi. Preparazione al Teorema di van Kampen: prodotto libero di gruppi.

Settimana 9.

- (26/4/2023) Equivalenza omotopica e π_1 . Proprietà universale del prodotto libero di gruppi. Il Teorema di Van Kampen, dimostrazione della parte facile.
- (28/4/2023) Correzione esercizi. Se $n \geq 2$ allora $\pi_1(S^n)$ è banale. Il bouquet di spazi topologici puntati e il suo gruppo fondamentale.

Settimana 10.

- (2/5/2023) Correzione esercizi.
- (3/5/2023) Decomposizioni cellulari e CW complessi. Il gruppo fondamentale delle superfici compatte orientabili.
- (5/5/2023) Rivestimenti. Rivestimenti e gruppo fondamentale (trailer). Unicità del sollevamento.

Settimana 11.

- (9/5/2023) Rivestimenti: esistenza di sollevamenti di cammini e di omotopie tra cammini. Monodromia. Se $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ è un rivestimento, allora $p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ è iniettivo.
- (10/5/2023) La fibra $p^{-1}(y_0)$ di un rivestimento $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e i laterali destri di $p_*: \pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(Y, y_0)$. Il grado di un rivestimento.
- (12/5/2023) Correzione esercizi.

Settimana 12.

- (16/5/2023) Il gruppo degli automorfismi di un rivestimento $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, con X, Y connessi per archi e X localmente connesso per archi, è isomorfo al quoziente del normalizzatore di $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(Y, y_0)$ modulo $\pi_1(X, x_0)$.
- (17/5/2023) Curve in \mathbb{R}^n . Parametro lunghezza d'arco (parametro naturale). Curvatura e centro di curvatura di curve in \mathbb{R}^2 . Esistenza e unicità a meno di isometrie di curve in \mathbb{R}^2 con curvatura assegnata - enunciato.
- (19/5/2023) Correzione esercizi.

Settimana 13.

- (23/5/2023) Esistenza e unicità di curve in \mathbb{R}^2 con curvatura assegnata - dimostrazione. Riferimento (mobile) di Frenet associato a una curva. Le $(n - 1)$ curvature di una curva in \mathbb{R}^n , esistenza e unicità a meno di isometrie di curve in \mathbb{R}^2 con curvatura assegnata.
- (24/5/2023) Superfici in \mathbb{R}^3 (di classe C^k con $k \geq 1$). Spazio tangente in un punto di una superficie in \mathbb{R}^3 . La prima forma fondamentale. Derivata direzionale lungo un vettore tangente in un punto a una superficie in \mathbb{R}^3 . Applicazione di Gauss e seconda forma fondamentale. Curvature principali, curvatura media e curvatura di Gauss.
- (26/5/2023) Correzione esercizi.

Settimana 14.

- (30/5/2023) Lezione cancellata.
- (31/5/2023) Lezione cancellata.

Settimana 15.

- (6/6/2023) Correzione esercizi.
- (7/6/2023) Lezione cancellata.
- (9/6/2023) Lezione cancellata.