24/03/2025

1. SPAZIO QUOZIENTE

[X spazio topologico $\quad \sim$ relazione di equivalenza su X]

Abbiamo l'insieme quoziente $X/\sim$ e l'applicazione quoziente

$$X \xrightarrow{\pi} X/\sim$$
$$x \longmapsto [x] = \text{classe di equivalenza di } x = \pi(x) = \bar{x}$$

DOMANDA: c'è una topologia geometricamente significativa su $X/\sim$?

OSSERVAZIONE 1: supponiamo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di punti di X, e che

$$x_n \to x \in X \quad \text{per } n \to \infty$$

in una topologia significativa su $X/\sim$ chiediamo che $\pi(x_n) \to \pi(x)$ per $n \to \infty$.

$\boxed{\text{LEMMA 1}}$ Sia τ la collezione dei sottoinsiemi $A \subset X/\sim$ tali che

$$\pi^{-1}(A) \text{ è aperto in } X.$$

Allora τ è la collezione degli aperti di una topologia su $X/\sim$.

$\boxed{\text{DIM}}$
- Siccome $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ e $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$
- Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una collezione di elementi di τ, cioè $\pi^{-1}(A_i)$ è aperto in X per ogni $i \in I$. Allora

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(A_i)$$

e quindi $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.
- Se $A_1, A_2 \in \tau$, allora $\pi^{-1}(A_1 \cap A_2) = \pi^{-1}(A_1) \cap \pi^{-1}(A_2)$ e quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

$\square$

DEF La <u>topologia quoziente</u> su $X/\sim$ è quella in cui $A \subset X/\sim$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(A)$ è aperto in X.

<u>Lo spazio topologico quoziente</u> è l'insieme $X/\sim$ con la topologia quoziente.

<u>OSSERVAZIONE 2</u>: Con la topologia quoziente la "richiesta" dell'Osservazione 1 è soddisfatta. Inoltre l'applicazione quoziente π è continua. La topologia quoziente è la <u>più fine</u> tale che π sia continua.

PROP 1 Sia $X \xrightarrow{f} Y$ un'applicazione <u>continua</u> e <u>costante sulle classi di $\sim$-equivalenza</u>. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} X/\sim &\xrightarrow{\bar{f}} Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

DIM Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

cioè $f = \bar{f} \circ \pi$. Sia $A \subset Y$ aperto. Allora

$$\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(A) = f^{-1}(A),$$

e $f^{-1}(A)$ è aperto in X perchè f è continua.

Quindi $\bar{f}^{-1}(A)$ è aperto in $X/\sim$. $\square$

ESEMPIO 1: $X = \mathbb{R}$ $\quad x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Z}$.

Dimostriamo che $\mathbb{R}/\sim$ è omeomorfo a S^1. Sia

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{f} S^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

Siccome f è costante sulle classi di $\sim$-equivalenza, cioè

$$f(t+a) = f(t) \qquad \forall a \in \mathbb{Z}$$

abbiamo l'applicazione continua

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\sim &\xrightarrow{\bar{f}} S^1 \\ [t] &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = f(t) \end{aligned} \qquad (*)$$

Si vede subito che $\bar{f}$ è biunivoca. Per concludere che $\bar{f}$ è un omeomorfismo, usiamo la seguente

$\boxed{\text{PROP 2}}$ Sia $X \xrightarrow{g} Y$ un'applicazione continua e biunivoca tra uno spazio topologico compatto X e uno spazio topologico di Hausdorff Y. Allora g è un omeomorfismo.

$\boxed{\text{DIM}}$ Va dimostrato che l'inversa

$$Y \xrightarrow{g^{-1}} X$$

è continua. Basta dimostrare che per ogni chiuso $C \subset X$

$$g(C) = (g^{-1})^{-1}(C) \subset Y$$

è chiuso in Y. Siccome C è chiuso in un compatto, è compatto. Quindi $g(C)$ è compatto, e siccome Y è di Hausdorff segue che $g(C)$ è chiuso. $\square$

Per dimostrare che l'applicazione $\bar{f}$ in $(*)$ è un omeomorfismo basta dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ è compatto. Questo vale perché l'applicazione continua

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

è suriettiva, e $[0,1]$ è compatto.

ESEMPIO 2: $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$. Abbiamo definito la topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(K)$. Siccome $\mathbb{P}^n(K)$ come insieme è il quoziente di $K^{n+1}\setminus\{0\}$ modulo la relazione di equivalenza

$$x \sim y \quad \text{se } \exists \lambda \in K^* \text{ tale che } x=\lambda y$$

abbiamo anche la topologia quoziente su $\mathbb{P}^n(K)$ (ovviamente $K^{n+1}\setminus\{0\} = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} & \text{se } K=\mathbb{R} \\ \mathbb{R}^{2n+2}\setminus\{0\} & \text{se } K=\mathbb{C} \end{cases}$ ha la topologia euclidea).

Dimostriamo che la topologia quoziente su $\mathbb{P}^n(K)$ è uguale alla topologia euclidea.

Sia $K^{n+1} \xrightarrow{L} K$ una funzione lineare non nulla, sia $v_0 \in K^{n+1}$ t.c. $L(v_0)=1$, e sia

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} L &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^n(K)_L = \{[v] \mid L(v)\neq 0\} \\ w &\longmapsto [v_0+w] \end{aligned}$$

l'identificazione solita.

Basta dimostrare che un $A \subset \mathbb{P}^n(K)$ è aperto per la topologia quoziente se e solo se

$\varphi^{-1}(A \cap \mathbb{P}^n(K)_L)$ è aperto nella topologia euclidea del sottospazio affine $\operatorname{Ker} L \subset K^{n+1}$ (per ogni L).

Supponiamo che A sia aperto per la topologia quoziente di $\mathbb{P}^n(K)$. Sia

$$K^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(K)$$

l'applicazione quoziente. Allora $\pi^{-1}(A) \subset (K^{n+1}\setminus\{0\})$ è aperto per la topologia euclidea, e quindi

$$\pi^{-1}(A) \cap \{v_0+w \mid w \in \operatorname{Ker} L\}$$

è un aperto per la topologia euclidea del sottospazio affine $\{v_0+w \mid w\in\operatorname{Ker}L\} \subset K^{n+1}$. Siccome φ è la composizione

$$\operatorname{Ker}L \xrightarrow{\alpha} \{v_0+w \mid w\in\operatorname{Ker}L\} \xrightarrow{\pi|_{\dots}} \mathbb{P}^n(K)_L$$

e α è un isomorfismo di spazi affini (quindi un omeomorfismo per le topologie euclidee) segue che $\varphi^{-1}(A\cap\mathbb{P}^n(K)_L)$ è aperto per la topologia euclidea.

Supponiamo che per ogni L (e v_0) $\varphi^{-1}(A\cap\mathbb{P}^n(K)_L)$ sia aperto. Osserviamo che $\pi^{-1}(\mathbb{P}^n(K)_L)$ è aperto per la topologia euclidea, e che

$$K^{n+1}\setminus\{0\} = \bigcup_{0\neq L\in(K^{n+1})^\vee} \pi^{-1}(\mathbb{P}^n(K)_L).$$

Quindi basta dimostrare che

$$(*).\qquad \pi^{-1}(A\cap\mathbb{P}^n(K)_L) \text{ è aperto in } (K^{n+1}\setminus\operatorname{Ker}L).$$

Per ipotesi sappiamo che $\varphi^{-1}(A\cap\mathbb{P}^n(K)_L)$ è aperto per la top. eucl. di $\operatorname{Ker}L$, cioè (vedi sopra) $\pi^{-1}(A)\cap\{v_0+w \mid w\in\operatorname{Ker}L\}$ è aperto per la top. eucl. del sottospazio affine $\{v_0+w \mid w\in\operatorname{Ker}L\}$.
Siccome $\pi^{-1}(A)$ è invariante per riscalamento, segue che vale $(*)$.

ESEMPIO 3: Sia $A \subset X$, e definiamo la relazione di equivalenza $\overset{A}{\sim}$ su X così:

$$x \sim y \text{ se } \begin{cases} x = y, \text{ o} \\ x \in A \text{ e } y \in A \end{cases}$$

La contrazione di A è

$$X/_A := X/_{\overset{A}{\sim}}$$

Intuitivamente: $X/_A$ è ottenuta contraendo A a un punto.

Sia $D_n = \overline{B(\underline{0},1)} \subset \mathbb{R}^n$. Allora (notate che $D^n \supset \partial D^n = S^{n-1}$)

$$D_n/_{S^{n-1}} \cong S^n$$

Infatti sia

$$D^n \xrightarrow{f} S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(2x\sqrt{1-\|x\|^2},\ 2\|x\|^2 - 1\right)$$

Allora
- f è continua
- $f(\partial D^n) = \{(0, \dots, 0, 1)\}$
- $f(B(\underline{0},1)) \subset S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$
- $B(\underline{0},1) \xrightarrow{f|_{B(\underline{0},1)}} S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ è biunivoca.

Per verificarlo è utile considerare il caso $n=1$, porre

$$x = \sin\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e notare che $f(\sin\theta) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$. Per la Prop. 1 esiste

$$D^n/_{S^{n-1}} \xrightarrow{\bar{f}} S^n$$

continua tale che $f = \pi \circ \bar{f}$, dove $D^n \xrightarrow{\pi} D^n/_{S^{n-1}}$ è l'applicazione quoziente. La $\bar{f}$ è biunivoca. Siccome $D^n/_{S^{n-1}}$ è compatto e S^n è di Hausdorff, $\bar{f}$ è un omeomorfismo.

24/03/2025

ESEMPIO 4: Siano M e N varietà topologiche della stessa dimensione d. Siano $p_0 \in M$ $q_0 \in N$. Siano $p_0 \in U_0 \subset M$ $q_0 \in V_0 \subset N$ intorni aperti omeomorfi a

$$B(\underline{0}, 2R) \subset \mathbb{R}^d \qquad R > 0,$$

con omeomorfismi

$$\begin{array}{ccccc} U_0 & \xleftarrow[\sim]{\alpha} & B(\underline{0}, 2R) & \xrightarrow[\sim]{\beta} & V_0 \\ \Psi & & & & \Psi \\ p_0 & \longleftarrow & \underline{0} & \longmapsto & q_0 \end{array}$$

Abbiamo l'omeomorfismo

$$\varphi : S^{n-1} \times (R, 2R) \xrightarrow{\sim} \left(B(\underline{0}, 2R) \setminus \overline{B(\underline{0}, R)}\right)$$
$$(x, t) \longmapsto t \cdot x$$

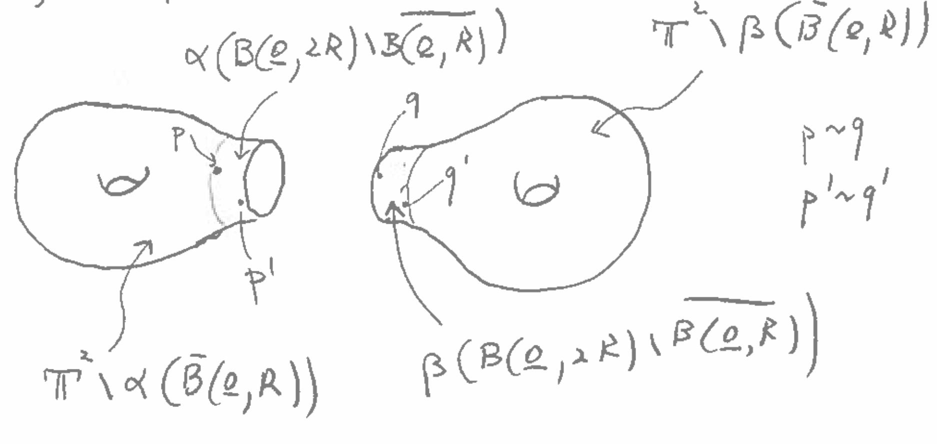
Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su

$$\left(M \setminus \alpha(\bar{B}(\underline{0}, R))\right) \amalg \left(N \setminus \beta(\bar{B}(\underline{0}, R))\right)$$

generata da

$$\alpha(\varphi(x, t)) \sim \beta(\varphi(x, 3R - t))$$

Figura per $d = 2$: $M = N = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.



24/03/2020

Poniamo

$$M \# N := \left(M \setminus \alpha(\bar{B}(0,R))\right) \sqcup \left(N \setminus \beta(\bar{B}(0,R))\right) \big/ \sim$$

<u>DOMANDA</u>: In che misura la classe di omeomorfismo di $M \# N$ dipende dalle scelte fatte?

<u>Risposta</u>: Innanzitutto dipende dalle componenti connesse di M e N a cui appartengono p_0 e q_0. Supponiamo che M e N siano connesse. In generale la classe di omeomorfismo di $M \# N$ dipende dalle scelte, ma in maniera "discreta".

Chiamiamo $M \# N$ "la" somma connessa di M e N senza preoccuparci dello scrupolo appena discusso.

<u>TEOREMA</u> Sia M una varietà topologica di dimensione 2 (una <u>superficie</u>) connessa e compatta. Allora M è omeomorfa a una e a una sola delle seguenti superfici

$$S^2, \quad \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \quad \dots, \quad \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g}, \quad \dots$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad \dots, \quad \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{g}, \quad \dots$$

(La somma connessa di superfici connesse non dipende dalle scelte che si fanno.)

ESEMPIO 5: Sia $Aut(X)$ il gruppo degli omeomorfismi di X in sè. Sia $G < Aut(X)$ un sottogruppo. Definiamo la relazione $\overset{G}{\sim}$ su X così:

$$x \overset{G}{\sim} y \text{ se esiste } g \in G \text{ t.c. } x = g(y)$$

Si verifica facilmente che $\overset{G}{\sim}$ è una relazione di equivalenza.

$\boxed{\text{DEF}}$ Il quoziente di X modulo G è lo spazio topologico

$$X/\overset{G}{\sim}$$

e si denota X/G.

ESEMPIO 6: $X = \mathbb{R}$

$$G = \{ \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi_\lambda} \mathbb{R},\ x \longmapsto \lambda \cdot x \mid \lambda \in \mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$

Il quoziente

$$\mathbb{R}/G = \{[0], [1]\}$$

non è di Hausdorff perchè gli aperti sono

$$\emptyset,\ \{[1]\},\ \{[0], [1]\}$$

ESEMPIO 7: $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ la sfera dei vettori di norma 1.

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$, allora abbiamo l'omeomorfismo

$$S^{2n+1} \xrightarrow{\alpha_\lambda} S^{2n+1}$$
$$z \longmapsto \lambda \cdot z$$

$G := \{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = 1\}$ è un sottogruppo di $Aut(S^{2n+1})$

Abbiamo

$$S^{2n+1}/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

24/03/2025

Vediamo dagli ultimi due esempi che il quoziente di uno spazio top. di Hausdorff può essere o non essere di Hausdorff.

Vogliamo dare dei criteri utili a stabilire se $X/_T$ è di Hausdorff

Prima diamo il

$\boxed{\text{LEMMA 2}}$ Uno sp. top X è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

è chiusa.

$\boxed{\text{DIM}}$ Supponiamo che Δ_X sia chiusa, cioè che $X \times X \setminus \Delta_X$ è aperto. Siano $x_1, x_2 \in X$ distinti. Allora $(x_1, x_2) \in (X \times X \setminus \Delta_X)$, e per definizione di topologia prodotto esistono aperti $U_i \subset X$ per $i \in \{1,2\}$ tali che $U_1 \times U_2 \subset (X^2 \setminus \Delta_X)$. Quindi $U_1 \times U_2 \cap \Delta_X = \emptyset$, cioè $U_2 \cap U_1 = \emptyset$. Questo dimostra che se Δ_X è chiusa allora X è di Hausdorff. Leggendo la dimostrazione a ritroso vediamo che se X è di Hausdorff allora Δ_X è chiuso in X^2. □

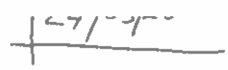
Useremo anche il seguente

$\boxed{\text{LEMMA 3}}$ Siano X uno sp. top. e $G < Aut(X)$ un gruppo di omeomorfismi di X. Allora l'applicazione quoziente

$$X \xrightarrow{\pi} X/G$$

è aperta. Se G è finito π è anche chiusa.

$\boxed{\text{DIM}}$ Sia $A \subset X$ aperto. Allora $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A)$ e siccome $g \in Aut(X)$ per ogni $g \in G$, $g(A) \subset X$ è aperto e perciò $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto. Per definizione di topologia quoziente $\pi(A)$ è aperto. Se G è finito π è chiusa perché l'unione finita di chiusi è chiusa. □

OSS Sia $X \xrightarrow{\pi} X/\sim$ l'applicazione quoziente per una relazione 
di equivalenza $\sim$. La π non è necessariamente aperta/chiusa.

Per esempio $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ non è chiusa.

e l'applicazione

$X = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto x$

$Y = \mathbb{R} = X/\sim$ $\quad \sim$ generata da $(0,0) \sim (0,1)$

non è aperta.

Il risultato seguente mostra che però vale un viceversa.

$\boxed{\text{PROP 3}}$ Sia $X \xrightarrow{f} Y$ un'applicazione continua e suriettiva.
Se f è aperta o chiusa, allora f è un quoziente (=identificazione)

$\boxed{\text{DIM}}$ Supponiamo che f sia aperta. Sia $A \subset Y$. Se A è aperto allora $f^{-1}(A)$ è aperto perché f è continua. Ora supponiamo che $f^{-1}(A)$ sia aperto in X. Siccome f è suriettiva

$$f(f^{-1}(A)) = A$$

e siccome f è aperta, A è aperto. Questo dimostra che se f è aperta allora f è un quoziente. La dimostrazione se f è chiusa è simile. $\square$

$\boxed{\text{PROP 4}}$ X sp. top. $G < \mathrm{Aut}(X)$. Allora X/G è di Hausdorff se e solo se

$$\Gamma := \{(x, g(x)) \mid x \in X \quad g \in G\} \subset X \times X$$

è chiuso.

$\boxed{\text{DIM}}$ Ricordiamo che X/G è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta \subset X/G \times X/G$$

è chiusa. Sia $\pi : X \to X/G$ l'applicazione quoziente. Poniamo

$$\begin{aligned} X \times X &\xrightarrow{\ \rho\ } X/G \times X/G \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (\pi(x_1), \pi(x_2)) \end{aligned}$$

Allora

$$\Gamma = \rho^{-1}(\Delta).$$

Quindi basta dimostrare che ρ è un'appl. quoziente. Per la Prop. 3 è sufficiente

E' chiaro che ρ è suriettiva. Per la Prop. 3 è sufficiente dimostrare che ρ è aperta, e per dimostrare questo basta dimostrare che, se $U, V \subset X$ sono aperti, allora $\rho(U \times V) \subset X/G \times X/G$ è aperto. Ma $\rho(U \times V) = \pi(U) \times \pi(V)$ e $\pi(U), \pi(V)$ sono aperti in X/G per il Lemma 3. Quindi $\rho(U \times V)$ è aperto. $\square$

ES. Abbiamo dimostrato che $\mathbb{P}^n(K)$ con la top. eucl. ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$) è uguale a $\mathbb{P}^n(K)$ con la top. quoziente per la relazione $\sim$ su $\underbrace{K^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{con top. euclidea}}$ data da

$$X \sim Y \quad \text{se esiste } \lambda \in K^* \text{ t.c. } X = \lambda Y$$

Ma $K^* < \mathrm{Aut}(K^{n+1} \setminus \{0\})$ e

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \; = (K^{n+1} \setminus \{0\})/K^*$$

24/03/2025

Si può applicare la Prop. 4 a $\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\}) / K^\times$

per vedere (direttamente) che è di Hausdorff. Infatti

$$\Gamma = \{(X,Y) \in (K^{n+1} \setminus \{0\})^2 \mid X = \lambda Y \quad \lambda \in K^\times\} =$$

$$= \{(X,Y) \in (K^{n+1} \setminus \{0\})^2 \mid \underbrace{rg[X \ Y] \leq 1}_{X,Y \text{ colonne}}\}$$

e siccome $rg[X \ Y] \leq 1$ se e solo se tutti i determinanti dei minori 2×2 sono nulli, vediamo che

Γ è chiuso in $(K^{n+1} \setminus \{0\})^2$.

Diamo un'ampia classe di esempi. Prima una

$\boxed{\text{DEF}}$ Un <u>gruppo topologico</u> è un gruppo G con una topologia tale che le applicazioni

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

siano continue.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ $GL_n(K) \subset M_{n,n}(K)$ per $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$ con top. euclidea.

$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = 1_n\}$ $\qquad O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

$U_n(\mathbb{C}) := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^tA \cdot \bar{A} = 1_n\}$. $\qquad SU_n(\mathbb{C}) = \{A \in U_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$

24/03/2025

ES. Siano G un gruppo topologico e $H < G$ un sottogruppo. Definiamo la relazione di equivalenza $\overset{H}{\sim}$ su G così:

$$g_1 \overset{H}{\sim} g_2 \quad \text{se esiste} \quad h \in H \quad \text{t.c.} \quad g_1 = g_2 \cdot h$$

e poniamo

$$G/H = G/\overset{H}{\sim}$$

come insieme è l'insieme delle classi laterali sinistre di H

Se H è chiuso in G, allora G/H è di Hausdorff. Infatti per la Prop. 4 basta dimostrare che

$$\Gamma = \{(g, gh) \mid h \in H\} \subset G \times G$$

è chiuso. Sia

$$G \times G \xrightarrow{\varphi} G$$
$$(x, y) \longmapsto x^{-1} \cdot y$$

Allora $\Gamma = \varphi^{-1}(H)$. L'applicazione φ è continua (perché G è un gruppo topologico) e siccome H è chiuso segue che Γ è chiuso.