Algebra Lineare a.a. 2023/2024
Esame scritto, 18 Giugno 2024 - Risoluzioni

Esercizio 1. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ la matrice data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Siano $U, V \subset M_{2,2}(\mathbb{Q})$ i sottospazi vettoriali dati da

$$U := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{Q})\colon X \cdot A = 0\}, \quad W := \{X \in \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{Q})\colon A \cdot X = 0\}.$$

1. Determinate una base di U.
2. Determinate una base di W.
3. Determinate una base di $U \cap W$.

Risoluzione: (1): Siccome $\mathrm{im}(L_A) = \langle(1, 2)\rangle$, abbiamo che

$$X \in U \text{ se e solo se } X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0, \text{ cioè } X = \begin{bmatrix} 2a & -a \\ 2b & -b \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di U è data da

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(2): Siccome $\ker(L_A) = \langle(2, -1)\rangle$, abbiamo che

$$X \in W \text{ se e solo se } \mathrm{im}(L_X) \subset \langle(2, -1)\rangle, \text{ cioè } X = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di W è data da

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(3): Per quanto visto sopra abbiamo

$$X \in U \cap W \text{ se e solo se } X = \begin{bmatrix} -4b & 2b \\ 2b & -b \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di $U \cap W$ è data da

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $A \in M_{3,3}(\mathbb{K})$ la matrice data da

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinate per quali valori della caratteristica del campo $\mathbb{K}$ la matrice A è invertibile.

(b) Per tali valori determinate la matrice inversa A^{-1}.

Risoluzione: (a): La matrice A è invertibile se e solo se $\operatorname{Det} A \neq 0$. Abbiamo

$$\operatorname{Det} A = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 66.$$

Segue che se $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ allora A è invertibile. Se la $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$ dove p è un numero primo, allora $\operatorname{Det} A \neq 0$ se e solo se p non divide 66, cioè se e solo se $p \notin \{2, 3, 11\}$.

(b): Abbiamo

$$A^{-1} = (\operatorname{Det} A)^{-1} \cdot A^c = \frac{1}{66} \begin{bmatrix} 32 & -5 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $A \in M_{3,3}(\mathbb{C})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinate gli autovalori complessi di A e i relativi autospazi.

(b) Dimostrate che A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(c) Calcolate A^6.

Risoluzione: (a): Un calcolo dà che il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 27 = (\lambda - 3) \cdot \left(\lambda - \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}\right).$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}.$$

I relativi autospazi sono rispettivamente

$$\langle(1,1,1)\rangle, \langle(2\sqrt{3}i, 3-3\sqrt{3}i, -3-\sqrt{3}i)\rangle, \langle(2\sqrt{3}i, -3-3\sqrt{3}i, 3-\sqrt{3}i)\rangle.$$

(b): Siccome A è una matrice 3×3 con 3 autovalori complessi distinti è diagonalizzabile.
(c): Notiamo che per ogni autovalore λ di A si ha $\lambda^6 = 729$. Infatti questo segue dalle uguaglianze

$$\left(\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 3^3 \cdot \left(\frac{1+1\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = -27, \quad \left(\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 3^3 \cdot \left(\frac{1-1\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = -27.$$

Scriviamo $A = G^{-1} \cdot \Lambda \cdot G$ dove $\Lambda \in M_{3,3}(\mathbb{C})$ è una matrice diagonale con entrate gli autovalori di A. Allora

$$A^6 = G^{-1} \cdot \Lambda^6 \cdot G = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 729 & 0 & 0 \\ 0 & 729 & 0 \\ 0 & 0 & 729 \end{bmatrix} \cdot G = \begin{bmatrix} 729 & 0 & 0 \\ 0 & 729 & 0 \\ 0 & 0 & 729 \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo che la traccia di una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è data da

$$\operatorname{Tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n}. \tag{1}$$

Esercizio 4. (4a) Mostrate che se $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ allora $\operatorname{Tr}(G^{-1} \cdot A \cdot G) = \operatorname{Tr} A$.

(4b) Il professore ha definito un endomorfismo $f\colon V \to V$ di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$ di dimensione 6. Beatrice e Carlo hanno calcolato le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ associate a f nelle basi $\mathcal{B}$ (Beatrice) e $\mathcal{C}$ (Carlo) rispettivamente. Beatrice ha calcolato che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix},$$

e Carlo ha calcolato che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 13 & 21 & 6 \\ 14 & 7 & 2 & 5 & 1 & -6 \\ 13 & 4 & -16 & 5 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & 11 & 10 & -6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Perchè (almeno) uno tra Beatrice e Carlo ha sbagliato?

Risoluzione: (4a): Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - (\operatorname{Tr} A)\lambda^{n-1} + \ldots$$

Siccome $P_{G^{-1}\cdot A\cdot G}(\lambda) = P_A(\lambda)$ segue che $\operatorname{Tr}(G^{-1} \cdot A \cdot G) = \operatorname{Tr} A$.
(4b): Se Beatrice e Carlo avessero dato entrambi risposte corrette le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ sarebbero coniugate, e quindi avrebbero la stessa traccia per il punto (4a). Ma

$$\operatorname{Tr} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = 0, \quad \operatorname{Tr} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) > 0.$$

Esercizio 5. Siano $f, g \colon V \to W$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali finitamente generati su $\mathbb{K}$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera/falsa e motivare la risposta (cioè dimostrare che è vera oppure dare un controesempio):

(5a) $\mathrm{rk}(f+g) = \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g)$.

(5b) $\mathrm{rk}(f+g) \le \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g)$.

(5c) $\min\{\mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g)\} \le \mathrm{rk}(f+g)$.

Risoluzione:

(5a): È falso. Sia $f \neq 0$ e $g = -f$. Allora

$$\mathrm{rk}(f+g) = \mathrm{rk}(0) = 0 \neq 2\,\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g).$$

(5b): È vera perchè $\mathrm{rk}(f+g) = \dim \mathrm{im}(f+g)$ e $\mathrm{im}(f+g) \subset \mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g$, quindi

$$\mathrm{rk}(f+g) = \dim \mathrm{im}(f+g) \le \dim(\mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g) \le \dim(\mathrm{im}\, f) + \dim(\mathrm{im}\, g) = \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g).$$

(5c): È falso. Sia $f \neq 0$ e $g = -f$. Allora

$$\min\{\mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g)\} = \mathrm{rk}(f) \neq 0, \qquad \mathrm{rk}(f+g) = \mathrm{rk}(0) = 0.$$