Algebra Lineare a.a. 2023/2024

Esame scritto, 9 Luglio 2024 - Risoluzioni

Esercizio 1. Siano $V, W \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$\begin{aligned} V &:= \{X \in \mathbb{R}^4 \mid 0 = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2x_1 - x_3 + 5x_4 = 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4\} \\ W &:= \{X \in \mathbb{R}^4 \mid 0 = 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 3x_1 + x_2 - 11x_4 = x_3 + 4x_4\}. \end{aligned}$$

(a) Calcolate $\dim V$.

(b) Calcolate $\dim W$.

(c) È vero che $V \subset W$?

(d) È vero che $W \subset V$?

Risoluzione: (a) e (b): Sia V che W sono gli spazi di soluzioni di sistemi di equazioni lineari, con matrici associate date rispettivamente da

$$V : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad W : \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Riducendo a scala per righe le due matrici troviamo che V e W sono gli spazi di soluzioni dei seguenti sistemi a scala per righe di equazioni lineari:

$$V : \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= 0 \end{aligned}, \qquad W : \begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 11x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Segue che

$$\dim V = 2, \qquad \dim W = 1. \tag{1}$$

(c): Siccome $\dim V > \dim W$, V *non* è contenuto in W.
(d): Neppure W è contenuto in V. Per vederlo basta, ad esempio, prendere un generatore w di W,

$$w = (9, -5, -8, 2),$$

e verificare che $w \notin V$ poiché non soddisfa l'equazione

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0.$$

Esercizio 2. Sia $\varphi\colon \mathbb{F}_5^4 \longrightarrow \mathbb{F}_5^4$ l'endomorfismo tale che

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_3, \quad \varphi(e_3) = e_4, \quad \varphi(e_4) = e_1.$$

1. Determinate gli autovalori (in $\mathbb{F}_5$) di φ.
2. L'applicazione φ è diagonalizzabile (su $\mathbb{F}_5$)?

Risoluzione: La matrice associata a φ nella base standard di $\mathbb{F}_5^4$ è

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un facile calcolo dà che il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - 1.$$

Se $x \in \mathbb{F}_5$ è non nullo allora $x^4 = 1$. Quindi $P_A(\lambda)$ ha 4 radici distinte (in $\mathbb{F}_5$) e perciò φ è diagonalizzabile su $\mathbb{F}_5$.

Esercizio 3. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinate gli autovalori complessi di A e dimostrate che A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(b) Calcolate $\mathrm{Tr}(A^7)$.

Risoluzione: (a): Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

e quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 1 + i\sqrt{2}$ e $\lambda = 1 - i\sqrt{2}$. Siccome A ha due autovalori distinti, è diagonalizzabile ed esiste $G \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tale che

$$A = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - i\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot G$$

(b): Per quanto visto sopra abbiamo

$$A^7 = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (1 + i\sqrt{2})^7 & 0 \\ 0 & (1 - i\sqrt{2})^7 \end{bmatrix} \cdot G$$

e quindi

$$\mathrm{Tr}(A^7) = (1 + i\sqrt{2})^7 + (1 - i\sqrt{2})^7 = 2\left(1 - \binom{7}{2}2 + \binom{7}{4}4 - \binom{7}{6}8\right) = 86.$$

Esercizio 4. Sia $V \subset C^\infty(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale generato dalle funzioni

$$f(t) := 1, \qquad g(t) := \sin t, \qquad h(t) := \sin^2 t.$$

(a) Verificate che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\Psi} & C^\infty(\mathbb{R}) \\ F & \mapsto & F'' \end{array}$$

manda V in V e quindi definisce un endomorfismo $\Phi\colon V \to V$.

(b) Determinate una base di V che diagonalizza Φ.

Risoluzione: (a): Si hanno le uguaglianze

$$f''(t) := 0, \qquad g''(t) := -\sin t = -g(t), \qquad h''(t) := 2 - 4\sin^2 t = 2f(t) - 4h(t). \tag{2}$$

Questo mostra che $\Psi(V) \subset V$.
(b): La matrice associata a Φ dalla scelta della base $\mathcal{B} := \{f, g, h\}$ è

$$A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 4).$$

Quindi gli autovalori di Φ sono $\lambda = 0$ con autovettore f, $\lambda = -1$ con autovettore g, e $\lambda = -4$. Un facile calcolo dà che la funzione

$$q(t) := 1 - 2\sin^2 t$$

è un autovettore con autovalore -4. Quindi una base che diagonalizza Φ è

$$\{f, g, q\}.$$

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale con base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Siano $w_1(t), w_2(t), w_3(t) \in V$ definiti da

$$\begin{aligned} w_1(t) &:= (t+3)v_1 - v_2 + (t-2)v_3, \\ w_2(t) &:= v_1 + (t+1)v_2 - 2v_3, \\ w_3(t) &:= (t+3)v_1 - 5v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

Determinate per quali valori di $t \in \mathbb{R}$

$$\{w_1(t), w_2(t), w_3(t)\}$$

è una base di V.

Risoluzione: $\{w_1(t), w_2(t), w_3(t)\}$ è una base di V se e solo se

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} (t+3) & -1 & (t-2) \\ 1 & (t+1) & -2 \\ (t+3) & -5 & 2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Un calcolo dà che

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} (t+3) & -1 & (t-2) \\ 1 & (t+1) & -2 \\ (t+3) & -5 & 2 \end{bmatrix} = -t^3,$$

e quindi $\{w_1(t), w_2(t), w_3(t)\}$ è una base di V se $t \neq 0$.