Geometria Algebrica a.a. 2023/2024

Esame scritto - 4 Luglio 2024
Risoluzioni

Esercizio 1. (a) Definite il grado $\deg X$ di un chiuso $X \subset \mathbb{P}^N$.

(b) Sia $X \subset \mathbb{P}^5$ l'immagine dell'applicazione di Veronese

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{P}^5 \\ [Z_0, Z_1, Z_2] & \mapsto & [Z_0^2,\, Z_0Z_1,\, Z_0Z_2,\, Z_1^2,\, Z_1Z_2,\, Z_2^2] \end{array}$$

Dimostrate che $\deg X = 4$. (Suggerimento: basta dimostrare che per iperpiani generali $H_1, H_2 \subset \mathbb{P}^5$ l'intersezione $X \cap H_1 \cap H_2$ ha cardinalità 4, e quindi (perchè?) che se $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ sono curve di grado 2 generali allora $C_1 \cap C_2$ ha cardinalità 4.)

(c) Sia $Y_n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ l'immagine dell'applicazione di Segre

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^{2n+1} \\ ([T_0, T_1], [Z_0, \ldots, Z_n]) & \mapsto & [T_0Z_0, T_1Z_0, T_0Z_1, T_1Z_1, \ldots, T_1Z_n] \end{array}$$

Dimostrate che $\deg Y_n = n + 1$.

Risoluzione: (a): Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso. Per $k \in \{0, \ldots, n\}$ sia $\Gamma_X(k) \subset X \times \mathbb{Gr}(k, \mathbb{P}^n)$ definito da

$$\Gamma_X(k) = \{(p, \Lambda) \in X \times \mathbb{Gr}(k, \mathbb{P}^n) \mid p \in \Lambda\}\,.$$

Ricordiamo che

(a) $\Gamma_X(k)$ è chiuso in $X \times \mathbb{Gr}(k, \mathbb{P}^n)$.

(b) $\dim \Gamma_X(k) = \dim X + k(n - k)$.

(c) Se X è irriducibile allora anche $\Gamma_X(k)$ è irriducibile.

Supponiamo che X sia irriducibile di codimensione c. Sia π l'applicazione regolare

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_X(c) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Gr}(c, \mathbb{P}^n) \\ (p, \Lambda) & \mapsto & \Lambda \end{array}$$

Siccome sia $\Gamma_X(c)$ che $\mathbb{Gr}(c, \mathbb{P}^n)$ sono irriducibili è ben definito il grado di π (denotato con $\deg \pi$). Per il punto (b) menzionato sopra abbiamo che

$$\dim \Gamma_X(c) = \dim \mathbb{Gr}(c, \mathbb{P}^n).$$

Quindi $\deg \pi < \infty$. Il *grado di* X (denotato con $\deg X$) è definito da

$$\deg X := \deg_s(\Gamma_X(c) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Gr}(c, \mathbb{P}^n)).$$

In generale sia $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ la decomposizione in irreducibili di X, e sia c la codimensione di X. Il *grado di* X (denotato con $\deg X$) è la sommma dei gradi delle componenti irriducibili di X di codimensione c:

$$\deg X := \sum_{\dim X_i = \dim X} \deg X_i.$$

(b): Sia

$$C_1 = V(X_0X_2 - X_1^2) = \{[S^2, ST, T^2] \mid [S, T] \in \mathbb{P}^1\}$$

la conica liscia immagine dell'applicazione di Veronese

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C_1 \\ [S,T] & \mapsto & [S^2, ST, T^2] \end{array}$$

Se

$$I(C_2) = a_{00}X_0^2 + a_{01}X_0X_1 + a_{02}X_0X_2 + a_{11}X_1^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2),$$

allora l'intersezione $C_1 \cap C_2$ è in corrispondenza biunivoca (tramite l'applicazione di Veronese) con l'insieme degli zeri (in $\mathbb{P}^1$) di

$$a_{00}S^4 + a_{01}S^3T + (a_{02} + a_{11})S^2T^2 + a_{12}ST^3 + a_{22}T^4 = 0. \tag{1}$$

Siccome i coefficienti del polinomio omogeneo di quarto rado in S, Y in (1) sono arbitrari, per C_2 generale l'insieme degli zeri ha cardinalità 4. Se $C_1', C_2' \subset \mathbb{P}^2$ sono coniche generali, allora esiste una proiettività che porta C_1' in C_1 e C_2' in C_2. Quindi $C_1' \cap C_2'$ ha cardinalità 4 e perciò $\deg X = 4$.
(c): Siccome Y_n ha dimensione $n+1$ è sufficiente dimostrare che se $H_0, \ldots, H_n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ sono iperpiani generali, allora

$$|Y_n \cap H_0 \cap \ldots \cap H_n| = n+1.$$

Per $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ si ha

$$\sigma^{-1}(Y_n \cap H_i) = V\left(\sum_{j=0}^{n} L_{ij}(T_0, T_1)Z_j\right).$$

Segue che

$$([T_0, T_1], [Z_0, \ldots, Z_n]) \iff \mathrm{Det}(L_{ij}(T_0, T_1)) = 0.$$

Il determinante $\mathrm{Det}(L_{ij}(T_0, T_1))$ è un polinomio omogeneo di grado $n+1$, e quindi (se non è nullo) l'equazione $\mathrm{Det}(L_{ij}(T_0, T_1)) = 0$ ha al più $n+1$ soluzioni distinte in $\mathbb{P}^1$. Inoltre se ha $n+1$ soluzioni distinte la matrice $(L_{ij}(T_0, T_1))$ ha rango n per ogni soluzione. Questo dimostra (c) perchè se $H_0, \ldots, H_n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ sono iperpiani generali allora $\mathrm{Det}(L_{ij}(T_0, T_1)) = 0$ ha $n+1$ soluzioni distinte.

Ricordiamo che un automorfismo di una varietà algebrica X è un'applicazione regolare $f\colon X \to X$ che ha inversa regolare. L'insieme degli automorfismi con l'operazione di composizione è un gruppo denotato $\mathrm{Aut}(X)$, il *gruppo degli automorfismi di* X.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$ è uguale al gruppo delle affinità di $\mathbb{A}^1$, cioè che se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$ allora esistono $a, b \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$ tali che $f(z) = az + b$.

(b) Dare esempi di automorfismi di $\mathbb{A}^2$ che non sono affinità.

Risoluzione: (a): Sia $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$. Allora $f^*(z)$ è una funzione regolare su $\mathbb{A}^1$ e quindi è polinomiale. Perciò $f(z) = p(z)$ dove $p \in \mathbb{K}[z]$. Sia $g\,\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1)$ l'inversa di f. Allora $g(z) = q(z)$ dove $q \in \mathbb{K}[z]$. Siccome $g \circ f = \mathrm{Id}$ abbiamo $q(p(z)) = z$ e quindi $\deg p = \deg q = 1$.
(b): L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (w,z) & \mapsto & (w, z + p(w)) \end{array}$$

è regolare con inversa (regolare) data da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (w,z) & \mapsto & (w, z - p(w)) \end{array}$$

Esercizio 3. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ è uguale al gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}^1$, cioè che se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ allora

$$f([W,Z]) = [aW + bZ,\, cW + dZ]$$

dove

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

è una matrice non singolare. (Suggerimento: dimostrare che esiste una proiettività $g\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che $g \circ f([0,1]) = [0,1]$ e poi applicare il risultato del punto (a) dell'esercizio 2 alla restrizione di $g \circ f$ alla retta affine $\mathbb{P}^1_W$.)

Risoluzione: Se $f([0,1]) = [0,1]$, allora $f(\mathbb{P}^1_W) = \mathbb{P}^1_W$, e la restrizione di f a $\mathbb{P}^1_W \cong \mathbb{A}^1$ è un automorfismo di $\mathbb{P}^1_W$. Per il punto (a) dell'esercizio 2 esistono $a, b \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$ tali che

$$f([1,z]) = [1, az + b]$$

Segue che

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\ [W,Z] & \mapsto & [W, bW + aZ] \end{array}$$

e quindi è una proiettività. In generale, esiste una proiettività $g\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che $g \circ f([0,1]) = [0,1]$. Per quanto appena dimostrato $g \circ f$ è uguale a una proiettività h, e quindi $f = g^{-1} \circ h$. Siccome le proiettività formano un gruppo f è una proiettività.