Geometria Algebrica a.a. 2023/2024

Esame scritto - 9 Settembre 2024
Risoluzioni

Esercizio 1. (a) Sia $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ un automorfismo tale che $f = f^{-1}$. Dimostrate che se f non è l'identità allora f ha 2 punti fissi, cioè l'insieme $\{p \in \mathbb{P}^1 \mid f(p) = p\}$ ha cardinalità 2.

(b) Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva cubica liscia, cioè $I(X) = (F)$ dove $F \in \mathbb{K}[Z_0, Z_1, Z_2]_3$ e

$$V(F, \partial F/\partial Z_0, \partial F/\partial Z_1, \partial F/\partial Z_2) = \emptyset.$$

Sia $p_0 \in X$ e sia

$$X \setminus \{p_0\} \xrightarrow{\pi_{p_0}} X$$

l'applicazione che associa a p il punto $q \in X$ tale che $R \cap X = \{p_0, p, q\}$, dove $R \subset \mathbb{P}^2$ è la retta per p_0 e p. Più precisamente, sia $R = \mathbb{P}(U)$ dove $U \subset \mathbb{K}^3$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 2. La restrizione $F_{|U}$ è una funzione polinomiale omogenea di grado 3, non nulla (perchè X è liscia), quindi il divisore associato $\mathrm{div}(F_{|U})$ (in $\mathrm{Div}(R)$) è $p_0 + p + q$ per un qualche $q \in R$ (che può anche essere uguale a p_0 o a p). Dimostrate che π_{p_0} è regolare, e che è la restrizione di un'applicazione regolare

$$X \xrightarrow{\Pi_{p_0}} X.$$

(c) Dimostrate che $\Pi_{p_0} \circ \Pi_{p_0} = \mathrm{Id}_X$.

(d) Supponete che $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$. Dimostrate che Π_{p_0} ha 4 punti fissi, e deducetene che X non è razionale.

Risoluzione: (a): Si ha $f([Z]) = [G \cdot Z]$, dove $G \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ e $Z = (Z_0, Z_1)$ è visto come vettore colonna. Siccome $f = f^{-1}$, cioè $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1}$, si ha che $G \cdot G = \lambda 1_2$, dove $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e 1_2 è la matrice unità. Sia $H := \lambda^{-1/2} G$. Allora $f([Z]) = [H \cdot Z]$ e $H \cdot H = 1_2$. Dall'ultima equazione (ricordiamo che f non è l'identità) segue che H è diagonalizzabile, con autovalori $+1$ e -1. Siano v_+ e v_- corrispondenti autovettori. I punti fissi di f sono $[v_+]$ e $[v_-]$.

(b): Scegliamo coordinate omogenee $[Z_0, Z_1, Z_2]$ tali che $p_0 = [0, 0, 1]$ e tali che la retta (proiettiva) tangente a X in p_0 sia $V(Z_0)$. Allora $I(X)$ è generato da

$$F := Z_0 Z_2^2 + B(Z_0, Z_1) Z_2 + C(Z_0, Z_1),$$

dove $B(Z_0, Z_1), C(Z_0, Z_1)$ sono polinomi omogenei in Z_0, Z_1 di gradi rispettivamente 2 e 3. Siano $b(z_1) := B(1, z_1)$ e $c(z_1) := C(1, z_1)$, e sia

$$f := z_2^2 + b(z_1) z_2 + c(z_1).$$

L'equazione di $X_0 := X \cap \mathbb{P}^2_{Z_0} = X \setminus V(Z_0)$ nelle coordinate affini (z_1, z_2) (dove $z_i := Z_i/Z_0$), è data da

$$f(z_1, z_2) = 0.$$

Si ha che $\pi_{p_0}(X_0) \subset X_0$, e per $(z_1, z_2) \in X_0$ abbiamo che

$$\pi_{p_0}(z_1, z_2) = (z_1, -b(z_1) - z_2).$$

Quindi π_{p_0} è regolare sull'aperto denso X_0. Siccome il codominio è proiettivo e il dominio è liscio di dimensione 1, segue che da risultati generali che π_{p_0} è la restrizione di un'applicazione regolare $\Pi_{p_0}\colon X \to X$. In alternativa si può verificare l'ultima affermazione direttamente.

(c): Le applicazioni $\Pi_{p_0} \circ \Pi_{p_0}$ e Id_X sono uguali (evidentemente) sull'aperto denso X_0, e quindi sono uguali su tutto X.

(d): Notiamo che $\deg b \leq 2$ e $\deg c \leq 3$. Esaminando $V(Z_0) \cap X$ troviamo che (d1) $\deg b = 2$ e Π_{p_0} non ha punti fissi in $V(Z_0) \cap X$, oppure

(d2) $\deg b < 2$, $\deg c = 3$ e Π_{p_0} ha un punto fisso in $V(Z_0) \cap X$ (precisamente p_0).

Ora esaminiamo i punti fissi di Π_{p_0} in X_0. Chiaramente

$$\mathrm{Fix}(\Pi_{p_0}) \cap X_0 = \{(z_1, z_2) \mid 2z_2 + b(z_1) = 0\}.$$

Sia $\Delta(z_1) := b(z_1)^2 - 4c(z_1)$ il discriminante di f visto come polinomio quadratico in z_2. Se $(z_1, z_2) \in \mathrm{Fix}(\Pi_{p_0})$, allora $\Delta(z_1) = 0$. Viceversa, se $\Delta(z_1) = 0$, esiste un unico z_2 tale che $(z_1, z_2) \in \mathrm{Fix}(\Pi_{p_0})$, e cioè $z_2 = -b(z_1)/2$. Quindi

$$|\,\mathrm{Fix}(\Pi_{p_0}) \cap X_0| = |\{z_1 \in \mathbb{K} \mid \Delta(z_1) = 0\}|.$$

Ora, dall'ipotesi che X è liscia segue che ogni radice di Δ ha molteplicità 1 (calcolate le derivate parziali di f), e quindi

$$|\,\mathrm{Fix}(\Pi_{p_0}) \cap X_0| = \deg \Delta.$$

Se vale (d1) allora $\deg \Delta = 4$, se vale (d2) allora $\deg \Delta = 3$. In entrambi i casi $|\,\mathrm{Fix}(\Pi_{p_0})| = 4$. Se X fosse razionale, cioè isomorfa a $\mathbb{P}^1$ (per una curva proiettiva razionale equivale a essere isomorfa a $\mathbb{P}^1$), allora Π_{p_0} avrebbe 2 punti fissi per (a), contraddizione.

Esercizio 2. Per $d > 0$ sia $\Gamma_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{G}\mathrm{r}(1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$ definito da

$$\Gamma_d(\mathbb{P}^n) := \{(\mathbb{P}(U), [F]) \mid F_{|U} = 0\}. \tag{1}$$

(Nota: la condizione $F_{|U} = 0$ significa che la retta $\mathbb{P}(U)$ è contenuta in $V(F)$.)

(a) Dimostrate che $\Gamma_d(\mathbb{P}^n)$ è chiuso in $\mathbb{G}\mathrm{r}(1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$, e quindi è una varietà proiettiva.

(b) Sia $R_d \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$ il sottoinsieme i cui punti sono gli $[F]$ per cui esiste una retta contenuta in $V(F)$. Dimostrate che R_d è un chiuso di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d))$.

(c) Dimostrate che
$$\mathrm{cod}(\Gamma_d(\mathbb{P}^n),\ \mathbb{G}\mathrm{r}(1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)) = d + 1.$$

(d) Dimostrate che se $d > 2n - 3$ allora R_d è un chiuso proprio di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d))$.[1]

Risoluzione: (a): Identifichiamo $\mathbb{G}\mathrm{r}(1, \mathbb{P}^n)$ con $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})$. Un elemento di $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})$ è dato dalla classe di equivalenza di una matrice $A \in M_{2,n+1}$ di rango 2. Esplicitamente: ad A associamo il sottospazio vettoriale generato dalle righe, e l'equivalenza è data da $A \sim B$ se esiste $g \in \mathrm{GL}(2)$ tale che $A = g \cdot B$. La Grassmanniana $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})$ è unione degli aperti

$$\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})_{ij} := \{[A] \mid \mathrm{Det}\, A_{ij} \neq 0\}, \qquad 1 \leq i < j \leq n + 1,$$

dove A_{ij} è il minore 2×2 di A le cui colonne sono la i-esima e la j-esima colonna di A. Quindi basta dimostrare che

$$\Gamma_d(\mathbb{P}^n) \cap \big(\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})_{ij} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)\big)$$

è chiuso per ogni $1 \leq i < j \leq n + 1$. I conti sono dello stesso tipo per ogni scelta di i, j, li facciamo per $i = n$, $j = n + 1$. Ogni A con $\mathrm{Det}\, A_{n,n+1}$ è equivalente a un'unica matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-2} & 1 & 0 \\ c_0 & \cdots & c_{n-2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $(b_0, \ldots, b_{n-2}, c_0, \ldots, c_{n-2})$ sono coordinate affini sull'aperto $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})_{n,n+1} \cong \mathbb{A}^{2n-2}$. Il punto $([B], [F]) \in \mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})_{ij} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$ appartiene a $\Gamma_d(\mathbb{P}^n)$ se e solo se

$$F(\lambda b_0 + \mu c_0, \ldots, \lambda b_{n-2} + \mu c_{n-2}, \lambda, \mu) = 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

Si ha

$$F(\lambda b_0 + \mu c_0, \ldots, \lambda b_{n-2} + \mu c_{n-2}, \lambda, \mu) = P_0(F, b, c)\lambda^d + P_1(F, b, c)\lambda^{d-1}\mu + \ldots + P_d(F, b, c)\mu^d$$

dove $P_0(F, b, c), P_1(F, b, c), \ldots, P_d(F, b, c)$ sono polinomi nei coefficienti di F e nelle $b_0, \ldots, b_{n-2}, c_0, \ldots, c_{n-2}$. Quindi

$$\Gamma_d(\mathbb{P}^n) \cap \big(\mathrm{Gr}(2, \mathbb{K}^{n+1})_{n,n+1} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)\big) = \{([B], [F]) \mid P_0(F, b, c) = P_1(b, c) = \ldots = P_d(F, b, c) = 0\},$$

e perciò è chiuso.

(b): Le due proiezioni di $\mathbb{G}\mathrm{r}(1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$ definiscono applicazioni regolari

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_d(\mathbb{P}^n) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ \mathbb{G}\mathrm{r}(1, \mathbb{P}^n) & & \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d) \end{tikzcd}$$

Notiamo che

$$R_d = \rho(\Gamma_d(\mathbb{P}^n)). \tag{2}$$

[1] Il risultato dell'esercizion non è banale. Provate (a casa) a scrivere, per ogni $d > 3$, un $[F] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]_d))$ tale che $V(F)$ non contenga alcuna retta.

Siccome $\Gamma_d(\mathbb{P}^n)$ è proiettivo e ρ è regolare, segue che R_d è chiuso.

(c): Per ogni $\Lambda \in \mathbb{G}\mathrm{r}(1,\mathbb{P}^n)$ si ha che $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda \times V_\Lambda$ dove $V_\Lambda \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0,\ldots,Z_n]_d)$ è un sottospazio lineare di codimensione $d+1$. Segue che $\Gamma_d(\mathbb{P}^n)$ è irriducibile e che

$$\mathrm{cod}(\Gamma_d(\mathbb{P}^n),\, \mathbb{G}\mathrm{r}(1,\mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0,\ldots,Z_n]_d)) = d+1. \tag{3}$$

(d): Per le uguaglianze in (2) e in (3) si ha che

$$\begin{aligned}\dim R_d &= \dim \rho(\Gamma_d(\mathbb{P}^n)) \le \dim \Gamma_d(\mathbb{P}^n) = \\ &= \dim \mathbb{G}\mathrm{r}(1,\mathbb{P}^n) + \dim \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0,\ldots,Z_n]_d) - (d+1) = \dim \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0,\ldots,Z_n]_d) + 2n - d - 3.\end{aligned}$$

Segue che se se $d > 2n-3$ allora $\dim R_d < \dim \mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0,\ldots,Z_n]_d)$ e perciò R_d è un chiuso proprio di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[Z_0,\ldots,Z_n]_d)$.