Algebra Lineare

Prova scritta di esonero A - 28 Novembre 2023

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	9	
2	8	
3	6	
4	8	
5	9	
Totale	40	

Verrà valutata solo la risposta, <u>che deve apparire nel riquadro predisposto</u>.

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $U, W \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$U := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+2x_3 = x_1-x_2-x_4 = 0\}$, $\quad W := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_3+x_4 = x_2+2x_3-2x_4 = 0\}$.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indicare se è vera o falsa.

(a) $\dim U + \dim W = 4$. **Risposta:** VERA

(b) $U \cap W = \{0\}$. **Risposta:** VERA

(c) $U + W = \mathbb{R}^4$. **Risposta:** VERA

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Risoluzioni.

(a) $\dim U = \dim W = 2$. Infatti facili calcoli danno che

$U = \langle (2,0,-1,2), (0,2,-1,-2) \rangle$

$W = \langle (1,2,-1,0), (1,-2,0,-1) \rangle$

(b) La matrice associata al sistema lineare dato dalle eq.ni che definiscono U e W è

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Per trovare le sol.ni del sistema lineare (i cui zeri sono i vettori in $U \cap W$), riduciamo A a scala per righe con op. elem. sulle righe.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \leadsto$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \leadsto$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Siccome nella matrice a scala per righe il numero di righe non nulle è uguale al numero di colonne (= numero di incognite), il sistema lineare ha solo la sol.ne banale.

(c) La formula di Grassmann dà che

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Per (a), (b) segue che $\dim(U + W) = 4$, e perciò

$U + W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Determinate tutte le soluzioni in $\mathbb{Q}^4$ del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 15x_4 = 10 \end{cases}$$

Risposta: $\{ (19t+15, -7t-7, 2t+3, -t) \mid t \in \mathbb{Q} \}$

Punteggio: 8 punti.

Risoluzione.

Riduciamo a scala per righe la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 15 & 10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 15 & 10 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 15 & 10 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

(-3) (-2)

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Risolvendo "dal basso" il sistema di eq.ni lineari omogenee

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

si ottengono le sol.ni indicate.

Esercizio 3. Siano $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ dati da

$v_1 := (2,3,1)$, $v_2 := (1,1,0)$, $v_3 := (3,4,5)$, $w_1 := (3,1,4)$, $w_2 := (2,-1,1)$, $w_3 := (-3,7,4)$.

1. Esiste un'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i \in \{1,2,3\}$?

   Risposta: Sì

2. Esiste un'applicazione lineare $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(w_i) = v_i$ per ogni $i \in \{1,2,3\}$?

   Risposta: NO

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Risoluzione.

I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Per vederlo basta ridurre a scala per colonne la matrice 3×3 le cui colonne sono v_1, v_2, v_3.

I vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti. Infatti una relazione lineare non banale è

$$11 w_1 - 24 w_2 - 5 w_3 = 0.$$

1. Siccome v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, esiste una tale f.

2. Siccome w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti e v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, non esiste una tale g. (Se esistesse si avrebbe che

$$0 = f(0) = f(11 w_1 - 24 w_2 - 5 w_3) = 11 f(w_1) - 24 f(w_2) - 5 f(w_3) =$$
$$= 11 v_1 - 24 v_2 - 5 v_3,$$

e quindi v_1, v_2, v_3 sarebbero linearmente dipendenti.

Esercizio 4. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{bmatrix}$$

e sia $L_A \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ l'applicazione lineare associata ad A. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{Q}^2$ data da $\mathcal{B} := \{(1,2),\,(3,5)\}$.

(1) Determinate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$. **Risposta:** $\boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$

(2) Scrivete $L^n_A((1,0))$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Suggerimento: usate il punto (1).

Risposta: $\boxed{\begin{bmatrix} 3\cdot 2^{n+1} + 5\cdot(-1)^{n+1} \\ 5\cdot 2^{n+1} + 10\cdot(-1)^{n+1} \end{bmatrix}}$

Punteggio: (1) giusto: 4 punti, (2) giusto (si terrà conto della risposta a (1)): 4 punti.

Siano $v_1 = (1,2)$ $v_2 = (3,5)$. Quindi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

(1) $L_A(v_1) = (-1,-2) = -v_1$ $L_A(v_2) = (6,10) = 2v_2$.

Questo dà che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) Si ha che

$$(1,0) = -5V_1 + 2V_2$$

Quindi

$$L_A^n((1,0)) = -5L_A^n(V_1) + 2L_A^n(V_2) = -5\cdot(-1)^n V_1 + 2\cdot 2^n V_2 =$$

$$= 5\cdot(-1)^{n+1}\cdot(1,2) + 2^{n+1}\cdot(3,5) = (3\cdot 2^{n+1} + 5\cdot(-1)^{n+1},\ 5\cdot 2^{n+1} + 10\cdot(-1)^{n+1}).$$

Esercizio 5. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e sia $f \colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da $f(M) := AM - MA$. Per ciascuna delle seguenti liste di matrici 2×2 indicare se costituisce una base di $\operatorname{Ker} f$.

(a) $\{A,\ A^{-1}\}$. **Risposta:** NO

(b) $\{\mathbf{1}_2,\ A\}$. **Risposta:** SÌ

(c) $\{A,\ A^2\}$. **Risposta:** SÌ

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Con un facile calcolo si ottiene che

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0$$

se e solo se $c = -b$ e $d = b$. Quindi

$$\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

In particolare $\dim(\ker f) = 2$.

(a): Siccome $A^{-1} = -A$, A e A^{-1} sono linearmente dipendenti, quindi $\{A, A^{-1}\}$ non è una base di $\ker f$.

(b): 1_2 e A commutano con A (cioè appartengono al $\ker f$), e sono linearmente indipendenti. Quindi $\{1_2, A\}$ è una base di $\ker f$.

(c): Siccome $A^2 = -1_2$, anche $\{A, A^2\}$ è una base di $\ker f$.