Algebra Lineare

Prova scritta di esonero B - 28 Novembre 2023

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	9	
4	9	
5	8	
Totale	40	

Verrà valutata solo la risposta, che deve apparire nel riquadro predisposto.

Voto/30: [ ]

Esercizio 1. Determinate tutte le soluzioni in $\mathbb{Q}^4$ del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +7\,x_2 & +8\,x_3 & +15\,x_4 & = & 10 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & +5\,x_3 & +9\,x_4 & = & 4 \\ x_1 & & +2\,x_3 & +5\,x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Risposta: $\{ (19t+15,\ 2t+3,\ -7t-7,\ -t) \mid t \in \mathbb{Q} \}$

Punteggio: 8 punti.

Esercizio 2. Siano $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ dati da

$v_1 := (3, 1, 4)$, $v_2 := (2, -1, 1)$, $v_3 := (-3, 7, 4)$, $w_1 := (5, 4, 3)$, $w_2 := (1, 3, 2)$, $w_3 := (0, 1, 1)$.

1. Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$?

   Risposta: NO

2. Esiste un'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(w_i) = v_i$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$?

   Risposta: SÌ

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti

w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti

Esercizio 3. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e sia $f\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da $f(M) := AM - MA$. Per ciascuna delle seguenti liste di matrici 2×2 indicare se costituisce una base di $\operatorname{Ker} f$.

(a) $\{\mathbf{1}_2,\ A\}$. **Risposta:** SÌ

(b) $\{\mathbf{1}_2,\ A^2\}$. **Risposta:** NO

(c) $\{\mathbf{1}_2 + A,\ \mathbf{1}_2 - A\}$. **Risposta:** SÌ

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Esercizio 4. Siano $U, W \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_2+x_3+2x_4 = x_1+x_3+x_4 = 0\}, \quad W := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2-x_4 = x_1+x_2+2x_3 = 0\}.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indicare se è vera o falsa.

(a) $U \cap W = \{0\}$. **Risposta:** FALSA

(b) $U + W = \mathbb{R}^4$. **Risposta:** FALSA

(c) $\dim U + \dim W = 4$. **Risposta:** VERA

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Esercizio 5. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{bmatrix}$$

e sia $L_A \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ l'applicazione lineare associata ad A. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{Q}^2$ data da $\mathcal{B} := \{(3,5),\ (1,2)\}$.

(1) Determinate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$. **Risposta:** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) Scrivete $L_A^n((0,1))$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Suggerimento: usate il punto (1).

Risposta: $\begin{bmatrix} -3 \cdot 2^n + 3 \cdot (-1)^n \\ -5 \cdot 2^n + 6 \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$

Punteggio: (1) giusto: 4 punti, (2) giusto (si terrà conto della risposta a (1)): 4 punti.