

Algebra Lineare  
**Prova scritta di esonero C - 28 Novembre 2023**

*Nome e Cognome:* \_\_\_\_\_

*Numero di Matricola:* \_\_\_\_\_

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	9	
3	8	
4	9	
5	8	
Totale	40	

*Verrà valutata solo la risposta, che deve apparire nel riquadro predisposto.*

**Voto/30:**

**Esercizio 1.** Siano  $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$  dati da

$$v_1 := (5, 4, 3), \quad v_2 := (1, 3, 2), \quad v_3 := (0, 1, 1), \quad w_1 := (1, 2, -1), \quad w_2 := (4, -3, 7), \quad w_3 := (4, 3, 1).$$

1. Esiste un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f(v_i) = w_i$  per ogni  $i \in \{1, 2, 3\}$ ?

Risposta:

SI

2. Esiste un'applicazione lineare  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $g(w_i) = v_i$  per ogni  $i \in \{1, 2, 3\}$ ?

Risposta:

NO

*Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.*

$v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti.

$w_1, w_2, w_3$  sono linearmente dipendenti.

**Esercizio 2.** Siano  $U, W \subset \mathbb{R}^4$  i sottospazi vettoriali definiti da

$$U := \text{Span}\{(1, 1, 2, 0), (1, -1, 0, -1)\}, \quad W := \text{Span}\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, -2)\}.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indicare se è vera o falsa.

(a)  $\dim U + \dim W = 4$ .    Risposta:

(b)  $U \cap W = \{0\}$ .    Risposta:

(c)  $U + W = \mathbb{R}^4$ .    Risposta:

*Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.*

**Esercizio 3.** Sia  $A \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$  la matrice

$$A := \begin{bmatrix} -21 & 60 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$$

e sia  $L_A: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$  l'applicazione lineare associata ad  $A$ . Sia  $\mathcal{B}$  la base di  $\mathbb{Q}^2$  data da  $\mathcal{B} := \{(3, 1), (5, 2)\}$ .

(1) Determinate  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A)$ . **Risposta:**

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Scrivete  $L_A^n((1, 0))$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Suggestione: usate il punto (1).

**Risposta:**

$$\begin{bmatrix} -5 \cdot 3^n + 6 \cdot (-1)^n \\ -2 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$$

*Punteggio: (1) giusto: 4 punti, (2) giusto (si terrà conto della risposta a (1)): 4 punti.*

**Esercizio 4.** Sia  $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  data da

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

e sia  $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$  l'applicazione lineare data da  $f(M) := AM - MA$ . Per ciascuna delle seguenti liste di matrici  $2 \times 2$  indicare se costituisce una base di  $\text{Ker } f$ .

(a)  $\{\mathbf{1}_2, A\}$ . Risposta:

SÌ

(b)  $\{\mathbf{1}_2, A^2\}$ . Risposta:

NO

(c)  $\{A, A^{-1}\}$ . Risposta:

NO

*Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.*

**Esercizio 5.** Determinate tutte le soluzioni in  $\mathbb{Q}^4$  del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Risposta:

$$\{ (2t+3, 19t+15, -7t-7, -t) \mid t \in \mathbb{Q} \}$$

*Punteggio: 8 punti.*