Algebra Lineare

Prova scritta di esonero D - 28 Novembre 2023

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	9	
2	8	
3	9	
4	8	
5	6	
Totale	40	

Verrà valutata solo la risposta, <u>che deve apparire nel riquadro predisposto</u>.

Voto/30: [ ]

Esercizio 1. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e sia $f\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da $f(M) := AM - MA$. Per ciascuna delle seguenti liste di matrici 2×2 indicare se costituisce una base di $\operatorname{Ker} f$.

(a) $\{A,\ A^{-1}\}$. **Risposta:** NO

(b) $\{A + A^{-1},\ A - A^{-1}\}$. **Risposta:** NO

(c) $\{\mathbf{1}_2,\ A\}$. **Risposta:** SÌ

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Esercizio 2. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ la matrice

$$A := \begin{bmatrix} -21 & 60 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$$

e sia $L_A \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ l'applicazione lineare associata ad A. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{Q}^2$ data da $\mathcal{B} := \{(5,2),\, (3,1)\}$.

(1) Determinate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$. **Risposta:** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) Scrivete $L^n_A((0,1))$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Suggerimento: usate il punto (1).

Risposta: $\begin{bmatrix} 5 \cdot 3^{n+1} - 15 \cdot (-1)^n \\ 2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$

Punteggio: (1) giusto: 4 punti, (2) giusto (si terrà conto della risposta a (1)): 4 punti.

Esercizio 3. Siano $U, W \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U := \mathrm{Span}\{(0,1,1,2),\ (1,0,1,1)\}, \quad W := \mathrm{Span}\{(1,-1,0,-1),\ (1,1,2,0)\}.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indicare se è vera o falsa.

(a) $\dim U + \dim W = 4$. **Risposta:** $\boxed{\text{VERA}}$

(b) $U + W = \mathbb{R}^4$. **Risposta:** $\boxed{\text{FALSA}}$

(c) $U \cap W = \{0\}$. **Risposta:** $\boxed{\text{FALSA}}$

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

Esercizio 4. Determinate tutte le soluzioni in $\mathbb{Q}^4$ del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ & 2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +9x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Risposta: $\{ (2t+3, -7t-7, 19t+15, -t) \mid t \in \mathbb{Q} \}$

Punteggio: 8 punti.

Esercizio 5. Siano $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ dati da

$v_1 := (1, 2, -1)$, $v_2 := (4, -3, 7)$, $v_3 := (4, 3, 1)$, $w_1 := (2, 3, 1)$, $w_2 := (1, 1, 0)$, $w_3 := (3, 4, 5)$.

1. Esiste un'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$?

   Risposta: $\boxed{\text{NO}}$

2. Esiste un'applicazione lineare $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(w_i) = v_i$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$?

   Risposta: $\boxed{\text{SÌ}}$

Punteggio: per ogni risposta giusta +3 punti, per ogni risposta sbagliata -3 punti, per ogni risposta non data 0 punti.

v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti.