Geometria Algebrica a.a. 2023/2024

# Esame scritto, 14 Giugno 2024, risoluzioni

**Esercizio 1.** Siano $X, Y \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ i sottoinsiemi dati da

$$X := \{[1,0]\} \times \mathbb{P}^1, \quad Y := \{(p,p) \mid p \in \mathbb{P}^1\},$$

e siano $U, V \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ i loro complementari, cioè

$$U := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus X), \quad V := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus Y).$$

(1a) Mostrare che $X$ e $Y$ sono chiusi in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(1b) L'aperto $U$ è affine? È proiettivo?

(1c) Stesse domande per $V$. È affine? È proiettivo?

(Le risposte ai punti (1b) e (1c) vanno giustificate!)

**Risoluzione**: (1a): Siccome abbiamo il ricoprimento aperto

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \left(\mathbb{P}^1_{Z_0} \times \mathbb{P}^1_{W_0}\right) \cup \left(\mathbb{P}^1_{Z_0} \times \mathbb{P}^1_{W_1}\right) \cup \left(\mathbb{P}^1_{Z_1} \times \mathbb{P}^1_{W_0}\right) \cup \left(\mathbb{P}^1_{Z_1} \times \mathbb{P}^1_{W_1}\right),$$

è sufficiente mostrare che l'intersezione di $X$ e $Y$ con ciascuno degli aperti è chiuso. Notiamo che ciascuno degli aperti è il prodotto di due rette affini e quindiè isomorfo al piano affine $\mathbb{A}^2$. L'intersezione di $X$ con i primi due aperti è una retta (affine) e la sua intersezione di $X$ con i rimanenti due aperti è vuota, e questo mostra che $X$ è chiuso. L'intersezione di $Y$ con il primo e l'ultimo aperto è una retta, e la sua intersezione di $X$ con i rimanenti due aperti è un'iperbole. Questo mostra che anche $Y$ è chiuso.
(1b): Chiaramente $U \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$. Siccome l'applicazione regolare

$$\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

non è localmente costante, la varietà $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è proiettiva. D'altra parte $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è una varietà affine perchè contiene la varietà proiettiva $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ di dimensione positiva. (Ogni funzione regolare su $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ si restringe a una funzione cosante su $\{0\} \times \mathbb{P}^1$, e questo è assurdo se $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ è una varietà affine.)
(1c): Sia $Q := V(Z_0Z_3 - Z_1Z_2) \subset \mathbb{P}^3$. Abbiamo l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & Q \\ ([S_0, S_1], [T_0, T_1]) & \mapsto & [S_0T_0, S_0T_1, S_1T_0, S_1T_1] \end{array}$$

dato dall'applicazione di Segre. Sia $H \subset \mathbb{P}^3$ il piano $H := V(Z_1 - Z_2)$. Si ha

$$Y = f^{-1}(Q \cap H), \qquad V = f^{-1}(Q \setminus Q \cap H).$$

Quindi $V$ è isomorfo alla superficie affine $Q \setminus Q \cap H$, e perciò è affine.

**Esercizio 2.** Siano $d, e$ numeri naturali positivi, e sia $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{de+d+e}$ l'applicazione definita da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^{de+d+e} \\ ([W_0, W_1], [Z_0, Z_1]) & \mapsto & [W_0^d \cdot Z_0^e, W_0^{d-1}W_1 \cdot Z_0^e \ldots, W^I \cdot Z^J, \ldots, W_1^d \cdot Z_1^e] \end{array} \tag{1}$$

dove $I = (i_0, i_1)$ e $J = (j_0, j_1)$ sono multiindici di lunghezza $i_0 + i_1 = d$ e $j_0 + j_1 = e$ rispettivamente. (Notate che $\varphi$ è ben definita!)

(2a) Mostrate che $\varphi$ è regolare, che l'immagine $\mathcal{S} := \operatorname{im} \varphi$ è chiusa in $\mathbb{P}^{de+d+e}$ e che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{S} \\ p & \mapsto & \varphi(p) \end{array}$$

è un isomorfismo.

(2b) Sia $F \in \mathbb{K}[W_0, W_1, Z_0, Z_1]$ un polinomio omogeneo nelle $W$ e $Z$ separatamente, di gradi rispettivamente $d$ ed $e$. Dimostrate che se $d, e$ sono entrambi positivi allora $V(F) \cap X \neq \emptyset$ per ogni chiuso $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ di dimensione 1 (suggerimento: scrivete $V(F) = \psi^{-1}(??)$). Mostrate che se $d > 0$ ed $e = 0$ esistono chiusi $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ di dimensione 1 tali che $V(F) \cap X = \emptyset$.

(2c) Sia $F \in \mathbb{K}[W_0, W_1, Z_0, Z_1]$ come nel punto (2b), e supponiamo che $X := V(F)$ sia liscio. Dimostrate che se $d, e$ sono entrambi positivi allora $X$ è irriducibile. Mostrate che se $d > 0$ ed $e = 0$ $X$ non è necessariamente irriducibile.

**Risoluzione**: (2a): Sia $\mathcal{C}_m \subset \mathbb{P}^m$ la curva razionale normale

$$\mathcal{C}_m := \left\{ [Z] \in \mathbb{P}^m \mid \operatorname{rk} \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{m-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_m \end{bmatrix} \leq 1 \right\}.$$

L'applicazione di Veronese definisce un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\nu_m} & \mathcal{C}_m \\ [Z_0, Z_1] & \mapsto & [Z_0^m, Z_0^{m-1}Z_1, \ldots, Z_1^m] \end{array}$$

Ricordiamo che l'applicazione di Segre

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^e & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^{de+d+e} \\ ([S], [T]) & \mapsto & [S_0T_0, S_1T_0, \ldots, S_dT_e] \end{array}$$

definisce un isomorfismo tra $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^e$ e un chiuso di $\mathbb{P}^{de+d+e}$. Il punto (2a) segue perchè $\varphi$ è la composizione

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_d \times \nu_e} \mathcal{C}_d \times \mathcal{C}_e \xrightarrow{\sigma|_{\mathcal{C}_d \times \mathcal{C}_e}} \mathbb{P}^{de+d+e}.$$

(2b): Supponiamo che $d, e$ siano entrambi positivi. Abbiamo

$$F = \sum_{|I|=d, |J|=e} a_{I,J} W^I \cdot Z^J,$$

dove $I = (i_0, i_1)$, $J = (j_0, j_1)$ variano tra i multiindici di lunghezza $d$ ed $e$ rispettivamente, $a_{I,J} \in \mathbb{K}$, e gli $a_{I,J}$ non sono tutti nulli. Denotiamo le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^{de+d+e}$ che appaiono in (1) con $\xi_{I,J}$, dove $I$ e $J$ sono multiindici di lunghezza $d$ ed $e$ rispettivamente. Sia $H \subset \mathbb{P}^{de+d+e}$ l'iperpiano definito da

$$H := \{[\ldots, \xi_{I,J}, \ldots] \mid \sum_{|I|=d, |J|=e} a_{I,J} \xi_{I,J} = 0\}.$$

Allora $V(F) = \varphi^{-1}(H)$, e quindi la restrizione di $\varphi$ all'aperto $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus V(F)$ definisce un isomorfismo

$$\left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus V(F)\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S} \setminus H$$

Siccome $\mathcal{S} \setminus H$ è affine, segue che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus V(F)$ è affine, e quindi non può contenere alcuna varietà proiettiva di dimensione positiva. Quindi se $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è un chiuso di dimensione 1 non è contenuto nel complementare di $V(F)$, cioè ha intersezione non nulla con $V(F)$. L'ultima affermazione di (2b) segue dal fatto che se $d > 0$ ed $e = 0$, allora $V(F)$ è l'unione di (al più $d$) rette $\{p\} \times \mathbb{P}^1$.
(2c): Assumiamo che $d, e$ siano entrambi positivi. Supponiamo che $X := V(F)$ sia riducibile, e quindi $X = X' \cup X''$ dove $X', X''$ sono chiusi propri di $X$. Siccome l'anello dei polinomi è a fattorizzazione unica, esistono polinomi $F', F'' \in \mathbb{K}[W_0, W_1, Z_0, Z_1]$, omogenei nelle $W$ e $Z$ di bigradi $(d', e')$ e $(d'', e'')$ rispettivamente, tali che

$$X' = V(F'), \quad X'' = V(F''), \quad F = F' \cdot F'', \quad d' + d'' = d, \quad e' + e'' = e.$$

Supponiamo che $d' > 0$ ed $e' > 0$. Allora $X' \cap X'' \neq \emptyset$ per il punto (2b), e questo contraddice l'ipotesi che $X$ sia liscio (o per il risultato generale che afferma che una varietà liscia è localmente irriducibile, oppure dalla fattorizzazione $F = F' \cdot F''$). Quindi possiamo assumere che $(d', e') = (d, 0)$ e $(d'' e'') = (0, e)$. Ma allora $X'$ è l'unione di (al più $d$) rette $\{p\} \times \mathbb{P}^1$ e $X''$ è l'unione di (al più $e$) rette $\mathbb{P}^1 \times \{q\}$. Segue che $X' \cap X'' \neq \emptyset$, contraddizione. Siano $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{K}$ distinti, e sia

$$F = \prod_{i=1}^{d} (Z_1 - a_i Z_0).$$

Allora $F$ è di bigrado $(d, 0)$ e $V(F)$ è l'unione di $d$ rette a due a due disgiunte. Quindi $V(F)$ è liscia e ha $d$ componenti irriducibili.

**Esercizio 3.** Sia $X \subset \mathbb{P}^3$ una superficie cubica irriducibile che contiene rette sghembe $L, M$. Sia $U \subset X$ l'aperto denso definito da $U := X \setminus L \setminus M$, e sia $\varphi\colon U \to L \times M$ l'applicazione che associa a $p \in U$ l'unica coppia $(a, b) \in L \times M$ tale che $p$ appartenga alla retta generata da $a$ e $b$.

(3a) Mostrate che $\varphi$ è regolare e che l'applicazione razionale $f\colon X \dashrightarrow L \times M$ rappresentata da $\varphi$ ha inversa razionale, e che quindi (perchè?) $X$ è razionale.

(3b) Supponiamo che char $\mathbb{K} \neq 3$. Mostrate che $X := V(Z_0^3 + Z_1^3 - Z_2^3 - Z_3^3)$ è irriducibile, e date un isomorfismo tra il campo delle funzioni razionali di $X$, cioè $\mathbb{K}(X)$, e il campo delle funzioni razionali in due trascendenti $\mathbb{K}(s, t)$.

**Risoluzione**: (3a): Possiamo scegliere coordinate omogenee $[S_0, S_1, T_0, T_1]$ su $\mathbb{P}^3$ tali che

$$L = V(T_0, T_1), \quad M = V(S_0, S_1).$$

Notate che $[S_0, S_1]$ sono coordinate omogenee su $L$ e $[T_0, T_1]$ sono coordinate omogenee su $M$. Segue che l'applicazione $\varphi$ è data da

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & L \times M \\ ([S_0, S_1, T_0, T_1) & \mapsto & ([S_0, S_1], [T_0 T_1]) \end{array}$$

Questo mostra che $\varphi$ è razionale. L'applicazione $\varphi$ ha inversa razionale perchè, siccome $X$ ha grado 3, una retta generale incidente a $L$ e a $M$ interseca $X$ in uno un solo punto fuori da $L \cup M$. Una descrizione esplicita dell'inversa di $\varphi$ si dà come segue. Sia $I(X) = (F)$. Quindi $0 \neq F \in \mathbb{K}[S_0, S_1, T_0, T_1]_3$. Siccome $L, M \subset X = V(F)$ si ha

$$F = \sum_{i,j \in \{0,1\}} S_i \cdot T_j \cdot L_{ij}, \qquad L_{ij} \in \mathbb{K}[S_0, S_1, T_0, T_1]_1.$$

Possiamo scrivere

$$\sum_{i,j \in \{0,1\}} S_i \cdot T_j \cdot L_{ij}(\lambda S_0, \lambda S_1, \mu T_0, \mu T_1) = G(S_0, S_1, T_0, T_1)\lambda + H(S_0, S_1, T_0, T_1)\mu, \qquad G, H \in \mathbb{K}[S_0, S_1, T_0, T_1]_3.$$

Segue che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \overset{\sigma}{\dashrightarrow} & X \\ ([S_0, S_1], [T_0, T_1) & \mapsto & ([H(S_0, S_1, T_0, T_1)S_0, H(S_0, S_1, T_0, T_1)S_1, -G(S_0, S_1, T_0, T_1)T_0, -G(S_0, S_1, T_0, T_1)T_1]) \end{array}$$

è l'inversa razionale di $\varphi$[1]. Siccome $L \times M \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ che è razionale, segue che $X$ è razionale.
(3b): Sia $\zeta \in \mathbb{K}$ una radice primitiva cubica di 1. Si fanno i calcoli opportuni relativi alle rette sghembe

$$L := V(Z_0 - Z_2, Z_1 - Z_3) \subset X, \quad M := V(Z_0 - \zeta Z_2, Z_1 - \zeta Z_3) \subset X.$$

[1] Qui salta agli occhi che ci vuole un'ipotesi aggiuntiva su $X$ perchè esista un'inversa razionale di $\varphi$: quale è?