LA TRASFORMATA DI FOURIER

1. Definizione della trasformata di Fourier

Definizione 1.1. Sia u in $L^1(\mathbb{R})$ e sia ξ in $\mathbb{R}$. La **trasformata di Fourier** di u è la funzione

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, u(x)\, dx\,. \tag{1.1}$$

Ovviamente, non è detto *a priori* che $\mathcal{F}(u)$ sia ben definita per ogni ξ in $\mathbb{R}$. Osservando però che se u è in $L^1(\mathbb{R})$ allora sono in $L^1(\mathbb{R})$ anche le funzioni $\cos(\xi\, x)\, u(x) = \Re(\mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, u(x))$ e $\mathrm{sen}(\xi\, x)\, u(x) = -\Im(\mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, u(x))$, sono ben definite le quantità

$$r(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\xi\, x)\, u(x)\, dx\,, \qquad i(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sen}(\xi\, x)\, u(x)\, dx\,,$$

dove gli integrali sono integrali secondo Lebesgue, e quindi è ben definita $\mathcal{F}(u)$. Dal momento che, per il Teorema di Lebesgue,

$$r(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \cos(\xi\, x)\, u(x)\, dx\,,$$

e

$$i(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{sen}(\xi\, x)\, u(x)\, dx\,,$$

$\mathcal{F}(u)$ può essere definita anche tramite il valore principale:

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathbf{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, u(x)\, dx\,.$$

Nel seguito useremo indifferentemente i due valori.

Esempio 1.2. Sia $u(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Allora, se $\xi \neq 0$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, \chi_{[-1,1]}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, dx = \frac{2\mathrm{sen}(\xi)}{\xi}\,.$$

Ovviamente, $\mathcal{F}(u)(0) = 2$. Osserviamo che $\mathcal{F}(u)$ è continua (mentre u non lo è), ed infinitesima all'infinito.

Sia $u(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Allora gli stessi calcoli di prima portano a

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = i\,\frac{\mathrm{e}^{-ib\xi} - \mathrm{e}^{-ia\xi}}{\xi}\,,$$

se $\xi \neq 0$, mentre $\mathcal{F}(u)(0) = b-a$. Anche in questo caso $\mathcal{F}(u)$ è continua ed infinitesima per $|\xi|$ tendente ad infinito.

Sia $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Allora

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi\, x}}{1+x^2}\, dx\,,$$

e questo integrale può essere calcolato con i residui (si rimanda a libri di analisi complessa), e si ottiene

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \pi\, \mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

Anche in questo caso $\mathcal{F}(u)$ è una funzione continua che tende a zero ad infinito.

Sia $u(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$. Allora

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi\, x - |x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1-i\xi)\, x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+i\xi)\, x}\, dx\,.$$

Pertanto,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{(1-i\xi)\, x}}{1-i\xi}\bigg|_{-\infty}^{0} + -\frac{\mathrm{e}^{-(1+i\xi)\, x}}{1+i\xi}\bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}\,.$$

2. Proprietà della trasformata di Fourier

In tutti gli esempi precedenti $\mathcal{F}(u)$ è una funzione limitata, continua, ed infinitesima per $|\xi|$ tendente ad infinito. Questa è una proprietà generale.

Teorema 2.1. *Sia u in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}(u)(\xi)$ è una funzione limitata, continua, ed infinitesima per $|\xi|$ tendente ad infinito.*

Dimostrazione. Si ha

$$|\Re(\mathcal{F}(u)(\xi))| = \left|\int_{\mathbb{R}} \cos(\xi\, x)\, u(x)\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx\,,$$

ed analogamente per $|\Im(\mathcal{F}(u)(\xi))|$; pertanto $\mathcal{F}(u)$ è limitata, e si ha

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{2.1}$$

Sia ora ξ_n convergente a ξ. Allora $\mathrm{e}^{-i\xi_n\, x}\, u(x)$ converge quasi ovunque a $\mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, u(x)$ (la convergenza è ovunque, tranne dove $|u(x)| = +\infty$, che è un insieme di misura nulla, essendo u in $L^1(\mathbb{R})$). Inoltre,

$$|\mathrm{e}^{-i\xi_n\, x}\, u(x)| \leq |u(x)|\,,$$

che è in $L^1(\mathbb{R})$. Per il Teorema di Lebesgue,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi\, x}\, u(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi_n\, x}\, u(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(u)(\xi_n)\,,\end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{F}(u)(\xi)$ è continua.

Infine, abbiamo già osservato che se $u = \chi_{[a,b]}$ allora $\mathcal{F}(u)$ tende a zero per $|\xi|$ tendente ad infinito. Essendo $\mathcal{F}$ un'applicazione lineare, se φ è una funzione semplice, allora $\mathcal{F}(\varphi)$ tende a zero per $|\xi|$ tendente ad infinito. Sia $\varepsilon > 0$, e sia φ_ε una funzione semplice tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Una tale funzione esiste per la densità delle funzioni semplici in $L^1(\mathbb{R})$. Sia $R_\varepsilon > 0$ tale che $|\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon)(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ se $|\xi| \geq R_\varepsilon$. Allora, per (2.1), se $|\xi| \geq R_\varepsilon$,

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(u-\varphi_\varepsilon)(\xi)| + |\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

La trasformata di Fourier, dunque, prende una funzione $L^1(\mathbb{R})$ e "restituisce" una funzione continua, limitata, e tendente a zero ad infinito. Inoltre, per la (2.1), l'applicazione $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ è una funzione continua: se u_n converge ad u in $L^1(\mathbb{R})$ (rispetto alla distanza d_1), allora $\mathcal{F}(u_n)$ converge uniformemente a $\mathcal{F}(u)$ in $\mathbb{R}$ (quindi nella distanza d_∞).

Prima di provare altre proprietà della trasformata di Fourier, ricordiamo il concetto di convoluzione tra due funzioni.

Definizione 2.2. Siano f e g in $L^1(\mathbb{R})$. La **convoluzione** tra f e g è la funzione definita da

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy\,.$$

Se f e g appartengono ad $L^1(\mathbb{R})$, allora anche $f * g$ vi appartiene. Infatti,

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy\,,$$

da cui, integrando ed usando il Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\,dx &\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\right)\,dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx\right).\end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1) *sia u in $L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, e sia u' in $L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = i\,\xi\,\mathcal{F}(u)\,; \tag{2.2}$$

2) *sia u in $L^1(\mathbb{R})$ tale che $x\,u(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\mathcal{F}(x\,u(x))(\xi) = i\,[\mathcal{F}(u)(\xi)]'\,; \tag{2.3}$$

3) *se u e v sono in $L^1(\mathbb{R})$, allora*

$$\mathcal{F}(u*v)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi)\,\mathcal{F}(v)(\xi)\,. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Sia $R > 0$. Allora, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,u'(x)\,dx &= \mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,u(x)\Big|_{-R}^{R} + i\,\xi\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,u(x)\,dx \\ &= \big(\mathrm{e}^{-iR\xi}\,u(R) - \mathrm{e}^{iR\xi}u(-R)\big) + i\,\xi\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,u(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Essendo u in $C^1(\mathbb{R})$, si ha

$$u(R) = u(0) + \int_0^R u'(t)\,dt\,,$$

e dal momento che

$$\left|\lim_{R\to+\infty}\int_0^R u'(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} u'(t)\,dt\right| \le \int_0^{+\infty} |u'(t)|\,dt < +\infty\,,$$

ne segue che $u(R)$ converge ad un limite finito quando R tende ad infinito. Essendo u in $L^1(\mathbb{R})$, tale limite non può essere che zero. Ragionamento analogo si può fare per $u(-R)$. Pertanto, essendo sia $\mathrm{e}^{-iR\xi}$ che $\mathrm{e}^{iR\xi}$ limitate (avendo modulo 1), si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u')(\xi) &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,u'(x)\,dx \\ &= i\,\xi\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,u(x)\,dx = i\,\xi\,\mathcal{F}(u)(\xi)\,.\end{aligned}$$

Si ha poi

$$\frac{\mathcal{F}(u)(\xi+h)-\mathcal{F}(u)(\xi)}{h}=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{e}^{-i(\xi+h)\,x}-\mathrm{e}^{-i\xi\,x}}{h}\,u(x)\,dx\,.$$

La successione

$$\frac{\mathrm{e}^{-i(\xi+h)\,x}-\mathrm{e}^{-i\xi\,x}}{h}$$

converge puntualmente a $-i\,x\,\mathrm{e}^{-i\xi\,x}$ quando h tende a zero; inoltre, per il Teorema di Lagrange,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-i(\xi+h)\,x}-\mathrm{e}^{-i\xi\,x}}{h}\right|\le|ix\,\mathrm{e}^{-i(\xi+\eta)\,x}|=|x|\,,$$

con η tra 0 e h. Pertanto,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-i(\xi+h)\,x}-\mathrm{e}^{-i\xi\,x}}{h}\,u(x)\right|\le|x\,u(x)|\,,$$

che appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ per ipotesi. Per il Teorema di Lebesgue,

$$\lim_{h\to0}\frac{\mathcal{F}(u)(\xi+h)-\mathcal{F}(u)(\xi)}{h}=-i\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,x\,u(x)\,dx=-i\,\mathcal{F}(x\,u)(\xi)\,,$$

e quindi (2.3) è dimostrata ricordando che $-\frac{1}{i}=i$.

Infine, osservando che $u*v$ è in $L^1(\mathbb{R})$, e quindi $\mathcal{F}(u*v)$ è ben definita, dal Teorema di Fubini segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u*v)(\xi)&=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-i\xi\,x}\left(\int_{\mathbb{R}}u(x-y)\,v(y)\,dy\right)dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-i\xi\,(x-y)}\,u(x-y)\,\mathrm{e}^{-i\xi\,y}\,v(y)\,dx\,dy\\&=\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-i\xi\,(x-y)}\,u(x-y)\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-i\xi\,x}\,v(x)\,dx\right)\\&=\mathcal{F}(u)(\xi)\,\mathcal{F}(v)(\xi)\,,\end{aligned}$$

e quindi (2.4). ■

Esempio 2.4. Il teorema precedente permette, in alcuni casi, di calcolare la trasformata di Fourier. Ad esempio, sia $t>0$, e sia

$$G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\,t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\,. \tag{2.5}$$

Come funzione della x, G è in $L^1(\mathbb{R})\cap C^1(\mathbb{R})$. Inoltre,

$$G_x(x,t)=-\frac{x}{2t}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi\,t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}=-\frac{x}{2t}\,G(x,t)\,,$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ anche essa. Pertanto, per la (2.2), si ha

$$\mathcal{F}(G_x)(\xi) = i\,\xi\,\mathcal{F}(G)(\xi)\,.$$

D'altra parte, per la (2.3)

$$\mathcal{F}(G_x)(\xi) = -\frac{1}{2t}\,\mathcal{F}(x\,G(x,t)) = -\frac{i}{2t}\,[\mathcal{F}(G)(\xi)]'\,.$$

Pertanto,

$$[\mathcal{F}(G)(\xi)]' = -2t\,\xi\,\mathcal{F}(G)(\xi)\,,$$

ovvero

$$\mathcal{F}(G)(\xi) = \mathcal{F}(G)(0)\,\mathrm{e}^{-t\xi^2}\,.$$

Essendo

$$\mathcal{F}(G)(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi\,t}}\,dx = \begin{bmatrix} y = \frac{x}{2\sqrt{t}} \\ dy = \frac{dx}{2\sqrt{t}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\,dy = 1\,,$$

si ha

$$\mathcal{F}(G)(\xi) = \mathrm{e}^{-t\,\xi^2}\,. \tag{2.6}$$

Esempio 2.5. Calcoliamo la trasformata di Fourier di $u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$. Innanzitutto,

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)'\,.$$

Pertanto,

$$2i\,[\mathcal{F}(u)(\xi)]' = 2\mathcal{F}(x\,u(x))(\xi) = -i\xi\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = -i\,\xi\,\pi\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,,$$

da cui

$$[\mathcal{F}(u)(\xi)]' = -\frac{\pi}{2}\,\xi\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

Tenuto conto che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\,,$$

come si vede usando i residui, si ha

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\pi}{2}\,(1+|\xi|)\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

Supponiamo ora che sia nota $\mathcal{F}(u)(\xi)$; è possibile risalire alla funzione u di cui è la trasformata; in altre parole, è possibile invertire la trasformazione, o "antitrasformare" $\mathcal{F}(u)$? La risposta è positiva in alcuni casi.

Esempio 2.6. Sia $w(\xi) = \pi\, \mathrm{e}^{-|\xi|}$. Già sappiamo che w è la trasformata di Fourier di $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$; cerchiamo pertanto di "recuperare" questa informazione. Consideriamo

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\,\xi\,x}\, \mathrm{e}^{-|\xi|}\, d\xi\,,$$

e proviamo a calcolare l'integrale. Si ha ovviamente

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\,x}\, \mathrm{e}^{-|\xi|}\, d\xi &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{i\xi\,x}\, \mathrm{e}^{-\xi}\, d\xi + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{i\xi\,x}\, \mathrm{e}^{\xi}\, d\xi \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(ix-1)\,\xi}}{ix-1}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{\mathrm{e}^{(ix+1)\,\xi}}{ix+1}\bigg|_{-\infty}^0 \\ &= -\frac{1}{ix-1} + \frac{1}{ix+1} = \frac{2}{1+x^2}\,,\end{aligned}$$

e quindi

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\,x}\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi\,.$$

3. Antitrasformata di Fourier

Prima di dimostrare che sotto condizioni "naturali" sulla funzione u e sulla sua trasformata si può recuperare u da $\mathcal{F}(u)$, enunciamo e dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 3.1. *Sia w una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)\, dx = 1\,,$$

e definiamo, per n in $\mathbb{N}$, $w_n(x) = n\, w(n\, x)$. Allora, per ogni funzione u continua e limitata su $\mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (w_n * u)(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_n(x-y)\, u(y)\, dy = u(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Si ha, ponendo $z = n(x-y)$, da cui $dz = -n\, dy$ e $y = x - \frac{z}{n}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} w_n(x-y)\, u(y)\, dy &= n \int_{\mathbb{R}} w(n\,(x-y))\, u(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} w(z)\, u\left(x - \frac{z}{n}\right)\, dz\,.\end{aligned}$$

La successione $u\left(x - \frac{z}{n}\right)$ converge a $u(x)$ (perché u è continua). Inoltre,

$$\left|w(z)\, u\left(x - \frac{z}{n}\right)\right| \le M\, |w(z)| \in L^1(\mathbb{R})\,,$$

dal momento che u è limitata. Per il Teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_n(x-y)\, u(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} w(z)\, u(x)\, dz = u(x)\,,$$

poiché l'integrale di w vale 1. ∎

Teorema 3.2. *Sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ e supponiamo che u sia limitata e $\mathcal{F}(u)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi\,. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Sia $w(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Allora w è in $L^1(\mathbb{R})$ ed ha integrale uguale ad 1 su $\mathbb{R}$. Inoltre, come verificato nell'Esempio 2.6, detta $v(\xi) = \mathcal{F}(w)(\xi) = \mathrm{e}^{-|\xi|}$ si ha

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, v(\xi)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, \mathcal{F}(w)(\xi)\, d\xi\,,$$

cosicché w soddisfa (3.1). Sia n in $\mathbb{N}$ e $v_n(\xi) = v(\frac{\xi}{n}) = \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|}{n}}$. Allora v_n converge puntualmente ad 1, ed è minore di 1 su tutto $\mathbb{R}$. Per il Teorema di Lebesgue, dato che $\mathrm{e}^{i\xi\, x}\, \mathcal{F}(u)(\xi)$ è in $L^1(\mathbb{R})$ per ipotesi,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, v_n(\xi)\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi\,.$$

Ricordando la definizione di $\mathcal{F}(u)(\xi)$ si ha, per il Teorema di Fubini, e per (3.1) applicata a w,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, v_n(\xi)\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi\, y}\, u(y)\, dy \right) \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, v_n(\xi)\, d\xi\,, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\,(x-y)}\, v_n(\xi)\, d\xi \right)\, u(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{in\xi\,(x-y)}\, v(\xi)\, d\xi \right)\, u(y)\, dy \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} w_n(x-y)\, u(y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

Per il Teorema 3.1 si ha allora

$$\begin{aligned}
u(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} w_n(x-y)\, u(y)\, dy \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, v_n(\xi)\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi\, x}\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi\,,
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ∎

Come conseguenza del teorema precedente, se u e v sono due funzioni che hanno la stessa trasformata di Fourier $w(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(v)(\xi)$, allora $u = v$.

4. Applicazioni della trasformata di Fourier

Esempio 4.1. Sia f una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ e consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(x) - u(x) = f(x)\,.$$

Supponendo u in $L^1(\mathbb{R})$ e tale che $u''(x)$ appartiene anche essa ad $L^1(\mathbb{R})$, possiamo applicare la trasformata di Fourier, ottenendo

$$\mathcal{F}(u'')(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\,,$$

da cui, per la (2.2),

$$-\xi^2\,\mathcal{F}(u)(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\,,$$

ovvero, per l'Esempio 1.2,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = -\frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{1+\xi^2} = -\frac{1}{2}\,\mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|})(\xi)\,.$$

Pertanto, per (2.4), dal momento che u e la convoluzione di f con $-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$ hanno la stessa trasformata di Fourier,

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-|x-y|}\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{e}^{y-x}\,dy - \frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{x-y}\,dy\,. \end{aligned}$$

Derivando due volte rispetto ad x, si verifica facilmente che $u''(x) - u(x) = f(x)$ per ogni x in $\mathbb{R}$.

Esempio 4.2. Consideriamo ora la cosiddetta *equazione del calore*:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0\,,$$

con condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$, che supponiamo una funzione in $L^1(\mathbb{R})$, continua e limitata. Fisicamente, la soluzione u rappresenta la temperatura al tempo t di una sbarra omogenea ed isolata, di lunghezza infinita, che al tempo iniziale abbia temperatura data da $u_0(x)$. Supponendo che tutto quello che stiamo facendo sia lecito, trasformiamo l'equazione in:

$$\mathcal{F}(u_t)(\xi) + \xi^2\,\mathcal{F}(u)(\xi) = 0\,,$$

e quindi, essendo $\mathcal{F}(u_t)(\xi) = [\mathcal{F}(u)(\xi)]_t$ per i teoremi di derivazione degli integrali dipendenti da un parametro, si ha

$$[\mathcal{F}(u)(\xi)]_t = -\xi^2\,\mathcal{F}(u)(\xi)\,,$$

da cui

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi)\,\mathrm{e}^{-t\xi^2}\,.$$

Ricordando (dall'Esempio 2.4) che se G è la funzione definita in (2.5),

$$\mathrm{e}^{-t\xi^2} = \mathcal{F}(G(x,t))(\xi)\,,$$

si ha, per (2.4),

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi)\,\mathcal{F}(G(x,t))(\xi) = \mathcal{F}(G(x,t) * u_0(x))(\xi)\,.$$

Pertanto, per il Teorema 3.2

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dx\,,$$

è la soluzione dell'equazione del calore.

Si noti che non è lecito prendere $t = 0$ nella formula appena scritta: il fatto che $u(x,0)$ sia uguale ad $u_0(x)$ va inteso nel seguente modo:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dx = u_0(x)\,.$$

Infatti, se definiamo

$$w(z) = \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}\,,$$

allora w è in $L^1(\mathbb{R})$ ed il suo integrale vale 1. Pertanto,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\,\left(\frac{1}{\sqrt{4t}}\,w\left(\frac{x-y}{\sqrt{4t}}\right)\right)\,dy\,,$$

converge ad $u_0(x)$ quando t tende a zero per il Teorema 3.1.

Si noti poi che se $u_0(x) \geq 0$, allora $u(x,t) \geq 0$ per ogni $t > 0$, e che se $u_0(x) > 0$ anche in un insieme "piccolo", si ha istantaneamente $u(x,t) > 0$ per ogni $t > 0$ e per ogni x in $\mathbb{R}$ (velocità infinita di propagazione del calore). Infine anche se u_0 è solo in $L^1(\mathbb{R})$, la soluzione è derivabile infinite volte con continuità, sia rispetto a x, che rispetto a t (se $t > 0$).