CAPITOLO 8

Zoologia dell'integrazione

1. A mo' di introduzione

Tanto per cominciare, cerchiamo di ricordare i fatti principali che abbiamo visto sugli integrali indefiniti:

— data una funzione f, una funzione F è una *primitiva di* f o un INTEGRALE INDEFINITO DI f se $F' = f$, la famiglia di primitive di una funzione f si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx;$$

— se la funzione f è definita in un intervallo, tutte le primitive di f sono uguali a meno di una costante additiva, cioè, data F primitiva di f,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R};$$

— se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, comunque si fissa $\alpha \in [a, b]$, tutte le primitive di f sono della forma

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + C \qquad C \in \mathbb{R};$$

— infine, se si ha la capacità di determinare una primitiva F di una funzione data f, allora è possibile calcolare il valore dell'integrale definito con un'operazione sconvolgentemente banale: calcolare la differenza di F agli estremi dell'intervallo, ossia

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{se} \quad F' = f. \tag{1.1}$$

Approfondiamo la questione espressa dall'ultimo punto... corriamo prima di tutto a rivedere come abbiamo calcolato il valore di alcuni integrali definiti a partire dalla definizione e poi torniamo qui a vedere questa formula. La differenza salta all'occhio: le sette camicie sudate per calcolare somme per difetto, per eccesso e poi fare in modo che l'ampiezza della partizione diventi piccola piccola fino a tendere a zero appaiono un supplizio degno delle peggiori torture medioevali se si confronta con l'unico tratto di penna che permette il calcolo dell'integrale definito una volta nota la primitiva. Ad esempio, dato che $(\ln t)' = 1/t$,

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,693147181\ldots.$$

Provate un po' ad arrivare alla stessa conclusione usando direttamente la definizione di integrale definito...

Perfetto, la formula (1.1) appare la panacea di tutti i mali: per calcolare un integrale definito, basta trovare una primitiva della funzione integranda... Ops... e la primitiva? Chi mi dà una primitiva? A qualsiasi prezzo. L'esempio di $1/t$ non è calzante, lì siamo partiti da una funzione integranda scelta con astuzia: è la derivata di una funzione nota. Quindi la primitiva è del tutto gratuita. E se, per un motivo mio che non sto a raccontarvi, devo assolutamente calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \mathrm{sen} x \, \cos x \, dx,$$

come faccio a trovare una primitiva di $\mathrm{sen} x \cos x$? L'integrale so che c'è, ci deve essere, perché la funzione $\mathrm{sen} x \cos x$ è una funzione continua in $[0,1]$ e quindi integrabile. Come fare? ...idea! C'è un risultato fondamentale che dice proprio come costruire una primitiva di una funzione continua f: basta definire la funzione integrale

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt.$$

Allora, una primitiva di $\mathrm{sen} x \cos x$ è, ad esempio,

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{sen} t \, \cos t \, dt.$$

Quindi l'integrale definito, che ho lo spasmodico bisogno di calcolare, vale

$$\int_0^1 \mathrm{sen} x \cos x \, dx = F(1) - F(0) = \int_0^1 \mathrm{sen} t \cos t \, dt - \int_0^0 \mathrm{sen} t \cos t \, dt = \int_0^1 \mathrm{sen} t \cos t \, dt.$$

Corto circuito! Per calcolare un integrale definito ci vuole una primitiva, per calcolare una primitiva ci vuole un integrale definito... e il circuito si chiude causando un terribile *loop*. Cos'è più nobile: concludere che la formula (1.1), seppur affascinante, sia del tutto inutile o reagire e prendere le armi contro un mare di guai andando alla ricerca di una strada alternativa che ci permetta di determinare una primitiva di una funzione assegnata? A questo dubbio amletico ognuno risponde come vuole e può.

In questo Capitolo intendiamo seguire la seconda strada. La formula (1.1) è troppo semplice per essere rigettata con un colpo di spugna. Dedichiamoci dunque al problema di determinare *esplicitamente* primitive F di una funzione data f, per lo meno per certe classi di funzioni con una struttura non troppo complicata.

A partire dalle operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e dalle funzioni trigonometriche ed esponenziali, formando inverse e composte di queste funzioni, è possibile costruire una classe molto ampia di funzioni che possiamo descrivere come "funzioni elementari". Per quanto riguarda l'operazione di derivazione, abbiamo visto che *la derivata di una funzione elementare è essa stessa una funzione elementare* ed il calcolo concreto della derivata è possibile tramite un certo numero di ricette: le formule di derivazione.

Al contrario, per l'integrazione, non è possibile arrivare alla stessa conclusione: non c'è un algoritmo generale che permetta di esprimere le primitive di una funzione assegnata tramite funzioni elementari.

Il problema è risolto in certe situazioni dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale che afferma

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + \text{costante},$$

cioè *ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione.* Ad esempio, dato che $D(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}) = x^\alpha$, si ha

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{costante} \qquad \forall\,\alpha \neq -1.$$

Allo stesso modo si ottengono altre formule di integrazione elementare:

$$\begin{aligned}
&\int \text{sen} x\,dx = -\cos x + C, && \int \cos x\,dx = \text{sen} x + C,\\
&\int e^x\,dx = e^x + C, && \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\\
&\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg} x + C, && \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\\
&\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C = \frac{\text{sen} x}{\cos x} + C, && \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\cot x + C = -\frac{\cos x}{\text{sen} x} + C,\\
&\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen} x + C, && \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.
\end{aligned}$$

Inoltre, grazie alla linearità dell'integrale, anche combinazioni lineari di funzioni di cui si conosce la primitiva, possono essere integrate esplicitamente. Ad esempio,

$$\int (1 + 2x + 3e^x)\,dx = \int 1\,dx + 2\int x\,dx + 3\int e^x\,dx = x + x^2 + 3e^x + C.$$

Si può essere soddisfatti: per un buon numero di funzioni è possibile conoscere la famiglia delle primitive. Ma come la mettiamo per

$$\int_0^1 \mathrm{sen}x \, \cos x \, dx \quad ?$$

Vi assicuro che necessito questo valore come l'aria che respiro. Nella tabella degli integrali elementari non compare, non è combinazione lineare di funzioni di cui conosco le primitive... E' un prodotto di funzioni di cui conosco l'integrale, ma non c'è nessuna regola che lega l'integrale del prodotto agli integrali dei singoli fattori. Bisogna industriarsi.

Si pone però un'altra domanda: c'è garanzia di riuscire sempre a determinare una primitiva di una funzione elementare che sia essa stessa una funzione elementare? La risposta è "no". Attimo di sconforto. E se lo chiedo per favore? Niente da fare, la severità della matematica non ammette eccezioni: *non è vero che tutti gli integrali delle funzioni elementari si possono scrivere in termini di funzioni elementari*. Ad esempio, non è possibile esprimere in forma "elementare", le primitive di e^{-x^2} (la dimostrazione di questo fatto non è affatto banale!). Questo risultato può suonare sorprendente, ma è un fatto della vita. Prendere o lasciare. Nelle pagine che seguono, ci dedichiamo al problema di individuare un certo numero di metodi che permettano di calcolare (quando possibile) l'integrale *in forma esplicita*.[1]

Per determinare esplicitamente una primitiva di una funzione assegnata si usano (sostanzialmente) quattro ingredienti[2]:

— la conoscenza di un certo numero di formule di integrazione elementari, dedotte a partire dalle ben note regole di derivazione;
— l'integrazione per sostituzione e l'integrazione per parti, che discendono da formule di derivazione: il primo discende derivazione di funzione composta, il secondo da quella della funzione prodotto;
— infine, il quarto ingrediente è l'esperienza. Più ci si esercita nel calcolo esplicito di primitive, più si viene a conoscenza di piccoli accorgimenti che variano da caso a caso.

[1] E' indispensabile sottolineare, ancora una volta, che *gli integrali di funzioni monotone e di funzioni continue esistono sempre, anche nel caso in cui non siano esprimibile in forma esplicita*.

[2] Una strada alternativa è quella di procurarsi un programma per il computer che faccia quest'operazione al posto nostro oppure di connettersi al sito `www.integrals.com` e sottoporre il quesito alla macchina. Raro è il caso in cui il ricorso ad un veggente o ad un medium dia esito positivo.

2. Metodo di sostituzione

La formula di derivazione di funzioni composte afferma che

$$\Big(F(\phi(x))\Big)' = F'(\phi(x))\phi'(x),$$

quindi $F(\phi(x))$ è una primitiva di $F'(\phi(x))\phi'(x)$, cioè

$$\int F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C. \tag{2.1}$$

Con questa semplice osservazione, possiamo già risolvere il problema di cui si diceva: qual è una primitiva di $\mathrm{sen}x\cos x$? Se $\phi(x) = \mathrm{sen}x$ e $F(t) = \frac{1}{2}t^2$, allora

$$F'(\phi(x)) = \mathrm{sen}x, \quad \phi'(x) = \cos x$$

e quindi

$$\int \mathrm{sen}x\,\cos x\,dx = \int F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C = \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x + C.$$

L'integrale definito a cui tanto aspiravo è determinato:

$$\int_0^1 \mathrm{sen}x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2 1.$$

Definendo $f(x) := F'(x)$, la formula (2.1) si può riscrivere come

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad \text{(formula di sostituzione, I versione)} \tag{2.2}$$

Questa formula esprime come si trasforma l'espressione dell'integrale passando dalla variabile di integrazione x alla nuova variabile $t = \phi(x)$. L'operazione da compiere si può ricordare mnemonicamente così: oltre a scrivere t al posto di $\phi(x)$, si deve sostituire formalmente $\phi'(x)\,dx$ con dt,

$$t = \phi(x) \qquad \Rightarrow \qquad \text{“}dt = \phi'(x)\,dx\text{”}.$$

(L'uso delle virgolette “ ” sta a sottolineare che non è stato dato senso ai simboli dt e dx e che la regola sopra scritta è solo formale). Se $F' = f$, cioè se si conosce una primitiva di f, l'integrale a destra in (2.2) è pari a $F(t)+C$ con $C \in \mathbb{R}$ e, per trovare la primitiva della funzione di partenza $f(\phi(x))\phi'(x)$ basta sostituire al posto di t la funzione $\phi(x)$ del cambio di variabile:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C.$$

Ad esempio, ponendo $t = x^2$,

$$\int 2x\mathrm{sen}(x^2)\,dx = \int \mathrm{sen}(t)\,dt = -\cos t + C = -\cos(x^2) + C.$$

La domanda naturale è: *come individuare una decomposizione della funzione integranda del tipo $f(\phi(x))\phi'(x)$?* Un metodo generale non c'è: occorre esercizio, esperienza ed anche una certa dose di fortuna... Più si sperimenta e più si impara ad accorgersi delle funzioni che si integrano in questo modo.

Anche per gli integrali definiti esiste una formula di sostituzione del genere della (2.2). Integrando in $[\alpha, \beta]$ la relazione $F'(\phi(x))\phi'(x)$,

$$\int_\alpha^\beta F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (F(\phi(x))'\,dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)).$$

Ponendo $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\beta)$,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Quindi otteniamo la formula

$$\int_a^b F'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx,$$

che, chiamando come prima $f := F'$, può essere riscritta come

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,dx \qquad \text{(formula di sostituzione, II versione).} \tag{2.3}$$

Nel caso degli integrali definiti si devono cambiare anche gli estremi compatibilmente con la formula che collega x con t, cioè $t = \phi(x)$.

Esempio 2.1. Per calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt,$$

vale la pena porre $t = \ln x$. Dato che $\phi(x) = \ln x$, ne segue $\phi'(x) = 1/x$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{x}{1+x^2}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+x^2}.$$

Rimangono da calcolare α e β:

$$\begin{cases} 0 = \phi(\alpha) = \ln\alpha \\ 1 = \phi(\beta) = \ln\beta \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \phi^{-1}(0) = e^0 = 1 \\ \beta = \phi^{-1}(1) = e^1 = e. \end{cases}$$

In definitiva

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \int_1^e \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} e - \operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg} e - \frac{\pi}{4}.$$

Interessante, nevvero?

Cambiare variabile integrale è come guardare da un punto di vista diverso lo stesso problema: in alcune situazioni permette di carpirne il segreto e risolverlo.

Esempi. Sia ϕ una funzione derivabile. Calcoliamo

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\,du.$$

Ponendo $x = \phi(u)$, si ha $dx = \phi'(u)\,du$, quindi

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\,du = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|\phi(u)| + C.$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C, \qquad \int \mathrm{tg}x\,dx = -\int \frac{-\mathrm{sen}x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Allo stesso modo, ponendo $x = \phi(u)$,

$$\int [\phi(u)]^{\alpha}\,\phi'(u)\,du = \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{1}{\alpha+1}\,[\phi(u)]^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1.$$

Ad esempio,

$$\int \mathrm{sen}^k x\,\cos x\,dx = \frac{1}{k+1}\,\mathrm{sen}^{k+1}x + C.$$

La formula di sostituzione è sempre conveniente nel caso di funzioni composte di cui l'ultima sia lineare: ponendo $x = au + b$

$$\int f(au+b)\,du = \frac{1}{a}\int f(x)\,dx.$$

Non è detto che l'integrale di destra sia risolvibile, ma l'espressione è comunque più semplice. Vediamo un esempio di questo genere

$$\int \frac{1}{\cos^2(2u+3)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}x + C = \frac{1}{2}\mathrm{tg}(2u+3) + C.$$

Un'altra espressione per la formula di sostituzione. Spesso ci si trova a lavorare con espressioni della forma

$$\int h(\phi(u))\,du,$$

dove l'integrando è una funzione composta $h(\phi(u))$, *senza il fattore moltiplicativo* $\phi'(u)$. E' possibile applicare la sostituzione $x = \phi(u)$? E, in caso affermativo, in che modo? Se la funzione ϕ è invertibile tutto fila liscio, occorre solo un po' di pazienza. Sia ψ la funzione inversa di ϕ,

$$\psi := \phi^{-1}$$

e chiamiamo $f(u) := h(\phi(u))$. Allora, con il cambio di variabile $u = \phi(x)$,

$$\int h(\phi(u))\,du = \int f(u)\,du = \int f(\psi(x))\psi'(x)\,dx = \int h(x)\psi'(x)\,dx.$$

dato che $f(\psi(x)) = h(\phi(\psi(x))) = h(x)$. Guardando il primo e l'ultimo termine:

$$\int h(\phi(u))\,du = \int h(x)\,\psi'(x)\,dx. \qquad \text{(formula di sostituzione, III versione).}$$

Nel caso di integrali definiti occorre cambiare gli estremi di integrazione coerentemente con la nuova variabile introdotta:

$$\int_a^b h(\phi(u))\,du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} h(x)\,\psi'(x)\,dx. \qquad \text{(formula di sostituzione, IV versione).}$$

Esercizio 2.2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (1+e^x)^2\,dx.$$

Soluzione. Poniamo $t = 1 + e^x$, allora $x = \ln(t-1)$ e $dx = \frac{1}{t-1}\,dt$. Quindi

$$\int (1+e^x)^2\,dx = \int \frac{t^2}{t-1}\,dt.$$

Dato che $\frac{t^2}{t-1} = t + 1 + \frac{1}{t-1}$,

$$\begin{aligned}\int (1+e^x)^2\,dx &= \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)\,dt = \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1| + C \\ &= \frac{1}{2}(1+e^x)^2 + 1 + e^x + x + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C.\end{aligned}$$

Si sarebbe anche potuto procedere scrivendo la funzione integranda nella forma $(1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$.

Esercizio 2.3. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \cos^2 x\,dx.$$

Soluzione. Dato che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\cos(2x) + 1\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}x.$$

Ponendo $t = 2x$,

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{sen} t + C = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2x) + C = \mathrm{sen} x \cos x + C.$$

Quindi

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen} x \cos x + x\right) + C.$$

Esercizio 2.4. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx.$$

Soluzione. Procedendo come sopra l'integrale può essere riscritto nella forma

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \Big(\cos(2x) + 1\Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx + \frac{\pi}{4}.$$

Poniamo nell'integrale $t = 2x$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\mathrm{sen} t\,\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Quindi il valore dell'integrale è $\pi/4$.

Esercizio 2.5. Fissato $a > 0$, calcolare gli integrali (indefinito e definito)

$$\int x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^a x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per 2 e poniamo $t = x^2 - a^2$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int 2x(x^2 - a^2)^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\, dt \\ &= \frac{t^{3/2}}{3} + C = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3} + C.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale definito basta calcolare la differenza di una primitiva tra i due estremi di integrazione

$$\int_0^a x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3}\,\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

3. Integrazione per parti

Il secondo metodo, ampiamente usato per l'integrazione esplicita, deriva dalla formula di derivazione del prodotto $(fg)' = f'g + fg'$. Integrando ed usando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$f(x)g(x) = \int g(x)\, f'(x)\, dx + \int g'(x)\, f(x)\, dx$$

o, equivalentemente,

$$\int g'(x)\, f(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx \quad \text{(integrazione per parti)} \tag{3.1}$$

Ecco spiegato perché si parla di *integrazione per parti*: l'integrale della funzione $g'f$ viene trasformato in una parte integrata, il termine fg, sommato all'integrale della funzione gf'. Il metodo è vantaggioso se per il termine gf' si conosce un metodo di integrazione.

Per gli integrali definiti, la formula (3.1) diviene

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)\,f(x)\,dx &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Vediamo una classe di esempi di integrali risolvibili tramite la formula (3.1). Partiamo da un caso semplice

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

Anche nel caso della funzione x^2e^x si può procedere in modo analogo, iterando due volte l'applicazione della formula di integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2(e^x)'\,dx = x^2e^x - 2\int x\,e^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\,dx\right] \\ &= x^2e^x - 2\,[(x-1)e^x + C] = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.\end{aligned}$$

E' chiaro a questo punto che è possibile, iterando n volte l'uso della formula, risolvere integrali del tipo

$$\int p(x)e^x\,dx \qquad\qquad p \quad \text{polinomio di grado } n,$$

In modo analogo è possibile calcolare anche integrali della forma

$$\int p(x)e^{\alpha x}\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

(basta osservare che $e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha}\big(e^{\alpha x}\big)'$). Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} \\ &\quad - \frac{2}{9}\left(xe^{3x} - \int e^{3x}\,dx\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + C\end{aligned}$$

Allo stesso modo si calcolano

$$\int x\mathrm{sen}x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = \mathrm{sen}x - x\cos x + C;$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\mathrm{sen}x)'\,dx = x\mathrm{sen}x - \int \mathrm{sen}x\,dx = \cos x + x\mathrm{sen}x + C.$$

In generale iterando il procedimento un numero opportuno di volte si calcolano gli integrali
$$\int p(x)\mathrm{sen}(ax)\,dx, \qquad \int p(x)\cos(ax)\,dx \qquad (a\in\mathbb{R}).$$
dove p è un polinomio.

Sempre tramite l'integrazione per parti, si risolvono anche
$$\int p(x)\ln x\,dx \qquad\qquad p \quad \text{polinomio.}$$
Calcoliamo l'integrale di $\ln x$:
$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx\\ = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.\end{aligned}$$
Analogamente,
$$\int x\ln x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$
In generale, dato $k\in\mathbb{N}$,
$$\int x^k\ln x\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \frac{1}{k+1}\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right) + C.$$

Esercizio 3.1. Calcolare gli integrali indefiniti
$$\int \mathrm{arc\,tg}x\,dx, \qquad \int x\mathrm{arc\,tg}x\,dx.$$

Soluzione. Procediamo come visto in precedenza per $\ln x$
$$\int \mathrm{arc\,tg}x\,dx = \int (x)'\mathrm{arc\,tg}x\,dx = x\mathrm{arc\,tg}x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx = \dots$$
Per calcolare l'ultimo integrale, moltiplichiamo e dividiamo per due, in modo da ricondurci alla forma $\int \phi'(x)/\phi(x)\,dx$
$$\dots = x\mathrm{arc\,tg}x - \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = x\mathrm{arc\,tg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$
Analogamente, per il secondo integrale
$$\int x\mathrm{arc\,tg}x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2\mathrm{arc\,tg}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$
Consideriamo separatamente l'integrale a secondo membro:
$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = x - \mathrm{arc\,tg}x + C.$$

Quindi

$$\int x\operatorname{arc\,tg}x\,dx = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arc\,tg}x - x\right] + C.$$

Adesso usiamo l'integrazione per parti in un modo leggermente diverso: iterando l'applicazione di (3.1) torniamo all'integrale originale, ottenendo in questo modo un'equazione per la primitiva. In questo modo risolviamo integrali della forma

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx, \qquad \int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx &= \frac{1}{3}\int e^{2x}(-\cos(3x))'\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)e^{2x} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx\\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x)e^{2x} + \frac{2}{9}\int e^{2x}(\operatorname{sen}(3x))'\,dx\\ &= \frac{1}{9}\left(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)\right)e^{2x} - \frac{4}{9}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx.\end{aligned}$$

Guardando il primo e l'ultimo termine

$$\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{9}\big(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)\big)e^{2x} - \frac{4}{9}\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx.$$

da cui, esplicitando rispetto all'integrale richiesto,

$$\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{13}\big(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)\big)e^{2x} + C.$$

In generale si ottengono le formule

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)\right)e^{ax} + C,\\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) - b\operatorname{sen}(bx)\right)e^{ax} + C.\end{aligned}$$

Formula ricorsive. Alcune famiglie di integrali (dipendenti da un parametro discreto $n \in \mathbb{N}$), possono essere risolte in modo iterativo, cioè si risolve l'integrale per $n = 1$, e poi si mostra come l'integrale al passo $n-$esimo si possa ricondurre al calcolo dell'integrale $(n-1)-$esimo. Vediamo un paio di esempi. Calcoliamo

$$I_n = \int \operatorname{sen}^{2n} x\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Allo stesso modo si può calcolare $\int \cos^{2n} x\, dx$. Calcoliamo I_1:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \int \operatorname{sen} x\, (-\cos x)'\, dx \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx \\ &= x - \operatorname{sen} x \cos x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una relazione del tipo $I_1 = x - \operatorname{sen} x \cos x - I_1$, quindi

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C.$$

Per $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= \int \operatorname{sen}^{2n+1} x \operatorname{sen} x\, dx = \int \operatorname{sen}^{2n+1} x\, (-\cos x)'\, dx \\ &= -\operatorname{sen}^{2n+1} x\, \cos x + (2n+1) \int \operatorname{sen}^{2n} x\, \cos^2 x\, dx \\ &= -\operatorname{sen}^{2n+1} x\, \cos x + (2n+1) \int \operatorname{sen}^{2n} x (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx \\ &= -\operatorname{sen}^{2n+1} x\, \cos x + (2n+1) I_n - (2n+1) I_{n+1}.\end{aligned}$$

Quindi $I_{n+1} = -\operatorname{sen}^{2n+1} x\, \cos x + (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}$, da cui si deduce

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left\{ (2n+1) I_n - \operatorname{sen}^{2n+1} x \cos x \right\} + C.$$

Ad esempio, per $n = 1$,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = I_2 &= \frac{1}{2} \left(3I_1 - \operatorname{sen}^3 x \cos x \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left(3x - 3\operatorname{sen} x \cos x - 2\operatorname{sen}^3 x \cos x \right) + C.\end{aligned}$$

* **Cenni sulle derivate deboli.** Passiamo ad un esercizio di stile diverso.

Esempio 3.2. Verificare che

$$\int_{-1}^{1} \phi(x) \operatorname{sgn} x\, dx = -\int_{-1}^{1} \phi'(x)\, |x|\, dx \qquad \forall \phi \text{ derivabile in } [-1,1], \quad \phi(\pm 1) = 0.$$

Soluzione. Calcoliamo separatamente i due integrali. Dalla definizione della funzione $\operatorname{sgn} x$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \phi(x) \operatorname{sgn} x\, dx &= \int_{-1}^{0} \phi(x) \operatorname{sgn} x\, dx + \int_{0}^{1} \phi(x) \operatorname{sgn} x\, dx \\ &= -\int_{-1}^{0} \phi(x)\, dx + \int_{0}^{1} \phi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Per il secondo integrale, usando l'additività e l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \phi'(x)\,|x|\,dx &= -\int_{-1}^{0} \phi'(x)\,x\,dx + \int_{0}^{1} \phi'(x)\,x\,dx \\ &= -\phi(x)\,x\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \phi(x)\,dx + \phi(x)\,x\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dato che

$$\phi(x)\,x\Big|_{-1}^{0} = \phi(0)\cdot 0 - \phi(-1)(-1) = 0, \qquad \phi(x)\,x\Big|_{0}^{1} = \phi(1)\cdot 1 - \phi(0)\cdot 0 = 0,$$

vale la conclusione. ∎

L'esercizio precedente suggerisce che anche se la funzione $|x|$ non è derivabile in 0 è possibile scrivere la formula di integrazione per parti sostituendo al posto della derivata della funzione $|x|$ la funzione $\operatorname{sgn} x$. Questa idea è quella che sta alla base della definizione di derivabilità in un senso più generale di quello che abbiamo visto fin ora.

Definizione 3.3. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ data. Una funzione $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è la *derivata debole* (o *distribuzionale*) di f in $[a,b]$ se

$$\int_{a}^{b} \phi(x)\,g(x)\,dx = -\int_{a}^{b} \phi'(x)\,f(x)\,dx \qquad \forall\phi \text{ derivabile in } [a,b], \quad \phi(a) = \phi(b) = 0.$$

In questo senso, l'esercizio precedente mostra che $\operatorname{sgn} x$ è la derivata debole di $|x|$ in $[-1,1]$. Chiaramente se f ammette derivata (classica) in $[a,b]$, allora ammette anche derivata distribuzionale in $[a,b]$ e questa è proprio la funzione f'. Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_{a}^{b} \phi(x)\,f'(x)\,dx = \phi(x)f(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \phi'(x)\,f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} \phi'(x)\,f(x)\,dx,$$

dato che $\phi(a) = \phi(b) = 0$ implica $\phi(x)f(x)\Big|_{a}^{b} = 0$.

4. Integrazione di funzioni razionali

Affrontiamo ora il problema di integrare funzioni razionali, cioè vogliamo scrivere in termini di funzioni elementari

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad P, Q \text{ polinomi.}$$

Si dimostra che questo problema ha sempre soluzione, cioè è sempre possibile esprimere le primitive di una qualsiasi funzione razionale in termini di funzioni elementari, ma non è in queste Note che troverete i dettagli della questione.

In concreto è possibile completare il calcolo a patto di saper fattorizzare il polinomio a denominatore Q nel prodotto di termini irrudicibili, cioè polinomi di primo grado (con molteplicità opportuna) e polinomi di secondo grado irriducibili (con molteplicità opportuna). In questo Paragrafo vedremo come si integrino funzioni razionali nel caso in cui il polinomio Q sia di grado al più due.

Denominatore Q di grado 1. Sia $Q(x) = a(x - x_0)$ con $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Se P è un polinomio di grado $p \geq 1$, tramite l'algoritmo di divisione dei polinomi, si determinano un polinomio P_1 di grado $p - 1$ e una costante $r \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{r}{a(x - x_0)}.$$

Quindi l'integrale si può decomporre nella somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int P_1(x)\, dx + \frac{r}{a} \int \frac{dx}{x - x_0}.$$

Il polinomio P_1 è integrabile esplicitamente, grazie alla formula

$$\int x^k\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Anche l'altro integrale è risolubile esplicitamente:

$$\frac{r}{a} \int \frac{dx}{x - x_0} = \frac{r}{a} \int \frac{(x - x_0)'}{x - x_0}\, dx = \frac{r}{a} \ln|x - x_0| + C.$$

Vediamo un esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x^5 + 1}{x - 2}\, dx.$$

Dato che

$$\frac{x^5 + 1}{x - 2} = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{33}{x - 2},$$

si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 + 1}{x - 2}\, dx &= \int \left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{33}{x - 2}\right) dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 33\ln|x - 2| + C.\end{aligned}$$

Denominatore Q di grado 2. Supponiamo che Q sia un polinomio di grado 2. In questo caso Q è scrivibile nella forma

$$Q(x) = a(x^2 + 2bx + c) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Se il polinomio a numeratore P ha grado $p \geq 2$, allora è possibile applicare l'algoritmo di divisione di polinomi e riscrivere la funzione razionale come somma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove P_1 è un polinomio di grado $p-2$ e R è un polinomio di grado minore o uguale a 1. L'integrale della funzione razionale è la somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Il primo dei due integrali è risolubile esplicitamente per via elementare. Consideriamo il secondo. Supponiamo che il resto R sia di grado 1 e scriviamolo nella forma $R(x) = \alpha(x+\beta)$ con $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Si tratta di calcolare

$$\int \frac{\alpha(x+\beta)}{a(x^2+2bx+c)}\,dx = \frac{\alpha}{a}\int \frac{x+\beta}{x^2+2bx+c}\,dx.$$

Come primo passo, "costruiamo" a numeratore la derivata del denominatore. Moltiplichiamo e dividiamo per due e, successivamente, sommiamo e sottraiamo $2b$

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha(x+\beta)}{a(x^2+2bx+c)}\,dx &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{2x+2\beta}{x^2+2bx+c}\,dx\\ &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2x+2b)+2(\beta-b)}{x^2+2bx+c}\,dx = \cdots.\end{aligned}$$

L'integrale finale può essere riscritto come somma dei due integrali di cui il primo è della forma $\int \phi'(x)/\phi(x)\,dx$; quindi

$$\begin{aligned}\cdots &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(x^2+2bx+c)'}{x^2+2bx+c}\,dx + \frac{2\alpha(\beta-b)}{2a}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}\\ &= \frac{\alpha}{2a}\ln|x^2+2bx+c| + \frac{2\alpha(\beta-b)}{2a}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}.\end{aligned}$$

Rimane quindi da risolvere l'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}. \tag{4.1}$$

Nel caso in cui R sia di grado 0 ci si riconduce direttamente a questa situazione. La risoluzione dell'integrale (4.1) varia a seconda di quante radici reali abbia il denominatore, cioè a seconda che sia $b^2 > c$, $b^2 = c$ o $b^2 < c$. Trattiamo i tre casi separatamente. Ci ricondurremo (sostanzialmente) ai seguenti integrali elementari

$$\begin{aligned}\text{Caso I}: &\quad b^2 > c \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\\ \text{Caso II}: &\quad b^2 = c \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + C,\\ \text{Caso III}: &\quad b^2 < c \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.\end{aligned}$$

Caso I. $b^2 > c$. In questo caso il denominatore ha due radici reali

$$x^2 + 2bx + c = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Indicando le radici con x_1 e x_2, il polinomio si fattorizza:

$$x^2 + 2bx + c = (x - x_1)(x - x_2).$$

Decomponiamo la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{x^2 + 2bx + c} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2},$$

dove $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti da determinare. La somma delle due frazioni a secondo membro è uguale a

$$\frac{(A_1 + A_2)x - (A_1 x_2 + A_2 x_1)}{x^2 + 2bx + c},$$

quindi le costanti A_1, A_2 sono le soluzioni del sistema lineare(3)

$$A_1 + A_2 = 0, \qquad A_1 x_2 + A_2 x_1 = -1.$$

Individuati i valori di A_1 e A_2, l'integrale è risolto, infatti

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} &= A_1 \int \frac{dx}{x - x_1} + A_2 \int \frac{dx}{x - x_2} \\ &= A_1 \ln|x - x_1| + A_2 \ln|x - x_2| + C. \end{aligned}$$

Esercizio 4.1. Calcolare

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Soluzione. Tramite la divisione di polinomi $\frac{x^3}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$. Quindi

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \left(x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Per risolvere l'integrale a secondo membro, moltiplichiamo e dividiamo per 2 e, successivamente, sommiamo e sottraiamo -1

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 - x - 2}\, dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 1) + 1 + \frac{4}{3}}{x^2 - x - 2}\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}\, dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{2} \ln|x^2 - x - 2| + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}. \end{aligned}$$

Dato che le radici del polinomio $x^2 - x - 2$ sono -1 e 2, esistono A e B tali che

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}.$$

(3)Il determinante di questo sistema è $x_1 - x_2$ che, nel caso $b^2 > c$ è diverso da zero.

Il sistema lineare soddisfatto da A e B è: $A+B=0$, $A-2B=1$, quindi $A=\frac{1}{3}$ e $B=-\frac{1}{3}$. Quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

In conclusione, l'integrale richiesto è

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}\ln|x-2| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{6}\ln|x-2| + \frac{7}{6}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Caso II. $b^2 = c$. In questa situazione, si tratta di risolvere

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2}.$$

Questo integrale è immediato, infatti

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b} + C.$$

Esercizio 4.2. Calcolare

$$\int \frac{x(x+3)}{(x-1)^2}\,dx.$$

Soluzione. Tramite la divisione di polinomi $\frac{x(x+3)}{(x-1)^2} = 1 + \frac{5x-1}{x^2-2x+1}$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x(x+3)}{(x-1)^2}\,dx &= x + 5\int \frac{x-\frac{1}{5}}{x^2-2x+1}\,dx = x + \frac{5}{2}\int \frac{(2x-2)+2+\frac{2}{5}}{x^2-2x+1}\,dx \\ &= x + \frac{5}{2}\ln|(x-1)^2| + 6\int \frac{dx}{(x-1)^2} = x + 5\ln|x-1| - \frac{6}{x-1} + C\end{aligned}$$

Caso III. $b^2 < c$. In questo caso il polinomio è irriducibile. L'obiettivo è di ricondursi, con un opportuno cambiamento di variabili, all'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Chiamiamo $\nu := \sqrt{c-b^2} > 0$ e riscriviamo in maniera opportuna il denominatore

$$x^2+2bx+c = x^2+2bx+b^2+(c-b^2) = (x+b)^2+\nu^2 = \nu^2\left\{\left(\frac{x+b}{\nu}\right)^2+1\right\}.$$

Ponendo $t = (x+b)/\nu$
$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\nu^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+b}{\nu}\right)^2} = \frac{1}{\nu}\int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{1}{\nu}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{\nu}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\nu}\right) + C.$$
Dalla definizione di ν si deduce che
$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C.$$

Esercizio 4.3. Calcolare
$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Soluzione. Come al solito, ricostruiamo a numeratore la derivata del denominatore:
$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2+\frac{2}{3}}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+2| + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}.$$
L'ultimo integrale può essere risolto come sopra
$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg}(x-1) + C.$$
Quindi
$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + C.$$

5. Breve campionario incompleto

Tanto per allargare un po' la panoramica sulla casistica possibile, prendiamo in considerazione qualche altro esempio.

Esempio 1. Supponiamo di voler calcolare
$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$
dove R è una funzione razionale dei suoi argomenti. Dalle relazioni
$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad\qquad \text{dove} \quad t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),$$
ponendo $t = \operatorname{tg}(x/2)$ o, equivalentemente, $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$, dato che $dx = 2/(1+t^2)dt$, l'integrale si trasforma in
$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)}\right| + C.$$

Esempio 2. Abbiamo un problema: calcolare l'area dell'ellisse

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\} \qquad a, b > 0.$$

Per evidenti ragioni si simmetria, l'area $\mathcal{A}(\Omega)$ di Ω è pari al valore dell'integrale definito

$$\mathcal{A}(\Omega) = 4b\int_0^a \sqrt{1-(x^2/a^2)}\,dx.$$

Introduciamo la variabile t definita da $x = a\cos t$, da cui $dx = -a\operatorname{sen} t\,dt$:

$$\mathcal{A}(\Omega) = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\,\operatorname{sen} t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,dt = 2ab\,[t - \operatorname{sen} t\cos t]_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Quindi l'area della regione delimitata dall'ellissi di semiassi a e b è πab.

Allo stesso modo è possibile integrare funzioni del tipo

$$R(x, \sqrt{1-(x^2/a^2)})$$

con R funzione razionale dei suoi argomenti. Infatti

$$\int R(x, \sqrt{1-(x^2/a^2)})\,dx = -a\int R(a\cos t, \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t\,dt.$$

dove $x = a\cos t$, e il secondo membro è razionale in $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

Esempio 3. Torniamo al caso dell'integrazione di funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$, e supponiamo che Q abbia solo radici reali *distinte*, cioè

$$Q(x) = a(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{con } x_i \neq x_j \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Supponiamo che il grado di P sia minore del grado di Q (altrimenti basta utilizzare il solito algoritmo della divisione di polinomi), e sfruttiamo la fattorizzazione di Q per riscrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali più semplici. Cerchiamo n costanti $A_1, \dots, A_n$ tali che

$$\frac{P(x)}{a(x-x_1)\cdots(x-x_n)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}\right).$$

Per determinare le costanti $A_1, \dots, A_n$ si può imporre l'uguaglianza dei due membri ottenendo un sistema lineare. Equivalentemente si può moltiplicare per $x - x_1$ entrambi i membri

$$\frac{P(x)}{a(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{1}{a}\left\{A_1 + \frac{A_2(x-x_1)}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n(x-x_1)}{x-x_n}\right\}.$$

e successivamente porre $x = x_1$, ottenendo il valore di A_1

$$A_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

Analogamente per $A_2, \dots, A_n$. Determinate le costanti A_i,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \frac{1}{a}\int\left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}\right)dx \\ &= \frac{1}{a}\left(A_1 \ln|x-x_1| + \cdots + A_n \ln|x-x_n|\right) + C.\end{aligned}$$

Per digerire la tecnica, calcoliamo

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Dato che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, non occorre applicare l'algoritmo di divisione di polinomi. Passiamo subito alla decomposizione: cerchiamo $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3}.$$

Moltiplichiamo per $x + 1$ e calcoliamo in $x = -1$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A_1 + \frac{A_2(x+1)}{x+2} + \frac{A_3(x+1)}{x+3} \qquad \Longrightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{2}.$$

Analogamente

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1(x+2)}{x+1} + A_2 + \frac{A_3(x+2)}{x+3} \qquad \Longrightarrow \qquad A_2 = -1.$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1(x+3)}{x+1} + \frac{A_2(x+3)}{x+2} + A_3 \qquad \Longrightarrow \qquad A_3 = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right| + C.\end{aligned}$$

Tabella degli integrali elementari

(C indica una costante arbitraria)

funzione f	primitiva $\int f\,dx$	funzione f	primitiva $\int f\,dx$
0	C	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\mathrm{sen} x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\mathrm{sen} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x\rvert + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arc\,tg} x + C$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x + C$	$\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arc\,sen} x + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x + C$

Qualche altro integrale

(C indica una costante arbitraria)

funzione f	primitiva $\int f\,dx$	funzione f	primitiva $\int f\,dx$
$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$	$\mathrm{arc\,tg} x$	$x \mathrm{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\mathrm{sen}^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \mathrm{sen} x \cos x) + C$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \mathrm{sen} x \cos x) + C$
$\mathrm{arc\,sen} x$	$x \mathrm{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$