CAPITOLO 5

Integrale di Riemann su $\mathbb{R}^n$

1. Funzioni integrabili secondo Riemann

In questo capitolo daremo la definizione di funzione integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}^n$. Come già fatto nel caso delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, la definizione sarà tale da fornire, qualora la funzione sia non negativa, il "volume" di un oggetto $n+1$ dimensionale. Se, ad esempio, $f : A \to \mathbb{R}$, con A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, e $f \geq 0$, l'integrale di f su A (o, meglio, l'integrale *doppio* di f su A) sarà un numero reale (non negativo) che rappresenta il volume della parte di $\mathbb{R}^3$ compresa tra il piano $z = 0$, la superficie $z = f(x, y)$, al variare di (x, y) in A.

Vedremo anche come, tramite la definizione di integrale di una funzione definita su $\mathbb{R}^n$, sarà possibile calcolare "aree" di oggetti di $\mathbb{R}^n$; daremo inoltre degli strumenti "pratici" per il calcolo di un integrale n-dimensionale, che verrà ricondotto al calcolo di n integrali unidimensionali (niente di nuovo sotto il sole, dunque...)

Le definizioni che seguono sono completamente analoghe al caso unidimensionale. Per comodità, lavoreremo solo in $\mathbb{R}^2$ (il caso n-dimensionale essendo completamente analogo).

Definizione 1.1. Un **rettangolo** in $\mathbb{R}^2$ è un prodotto di due intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$: $R = I_1 \times I_2$. Indicheremo con $|I|$ la lunghezza dell'intervallo I (modulo della differenza dei due estremi), e con $|R| = |I_1| \cdot |I_2|$ l'**area** del rettangolo R.

Ricordiamo che una **partizione** P dell'intervallo $I = [a, b]$ è data da un numero finito di punti $t_0 = a \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k = b$. Una partizione del rettangolo $R = I_1 \times I_2$ è semplicemente una coppia $P = (P_1, P_2)$ dove $P_1 = (t_0, \ldots, t_k)$ è una partizione di I_1 e $P_2 = (s_0, \ldots, s_m)$ è una partizione di I_2. Chiaramente il rettangolo R è suddiviso da P in $k \cdot m$ sottorettangoli S della forma $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-i}, s_j]$. Indicheremo la classe di questi sottorettangoli con

$$\mathcal{S}_P = \{S \colon S \text{ sottorettangolo di } R \text{ in una partizione } P\}.$$

Notare che questi sottorettangoli possono avere bordi sovrapposti, ma le loro parti interne sono sempre disgiunte.

Definizione 1.2. Dato un rettangolo R, una sua partizione P e una funzione $f : R \to \mathbb{R}$ **limitata**, possiamo definire la **somma inferiore**

$$\underline{s}(f, P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} |S| \cdot \inf_S f$$

e la **somma superiore**

$$\overline{s}(f, P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} |S| \cdot \sup_S f.$$

Le somme sono effettuate su tutti i sottorettangoli di R della partizione P, e chiaramente si ha sempre

$$\underline{s}(f, P) \le \overline{s}(f, P).$$

Procediamo esattamente come nel caso delle funzioni di una sola variabile e introduciamo la

Definizione 1.3. Una partizione P' è **più fine** della partizione P se ogni sottorettangolo di P si può scrivere come unione di sottorettangoli di P' (ossia: P' si ottiene da P aggiungendo punti di suddivisione). È evidente che in tal caso

$$\underline{s}(f, P) \le \underline{s}(f, P') \le \overline{s}(f, P') \le \overline{s}(f, P).$$

Notiamo che se P, P' sono due partizioni qualunque, possiamo comunque dire che

$$\underline{s}(f, P) \le \overline{s}(f, P');$$

infatti basta considerare la partizione P'' ottenuta unendo tutti i punti di suddivisione sia di P che di P', e osservando che P'' è più fine sia di P che di P' si ha subito

$$\underline{s}(f, P) \le \underline{s}(f, P'') \le \overline{s}(f, P'') \le \overline{s}(f, P').$$

Siamo pronti per definire il concetto di integrale di Riemann:

Definizione 1.4. Sia R un rettangolo e $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. L'**integrale inferiore** di f su R è il numero

$$\underline{\int_R} f = \sup\{\underline{s}(f, P) \colon P \text{ partizione di } R\}.$$

mentre l'**integrale superiore** di f su R è il numero

$$\overline{\int_R} f = \inf\{\overline{s}(f, P) \colon P \text{ partizione di } R\}$$

Diremo che f è **integrabile secondo Riemann su** R quando questi due numeri coincidono, e il loro valore comune si dirà l'**integrale di Riemann** di f su R:

$$\int_R f = \iint_R f(x, y)\,dx dy = \overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f.$$

È chiaro che questa definizione è proprio l'estensione a più dimensioni dell'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$. Notiamo però una prima differenza importante: su $\mathbb{R}$ abbiamo definito il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

che tiene conto dell'*ordine* in cui si trovano i punti a e b, e precisamente abbiamo deciso che

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Questa notazione diventa molto scomoda in più dimensioni (in quale variabile invertiamo il verso?) e infatti scriviamo $\int_R$ per sottolineare che non teniamo conto dell'ordine ma solo dell'insieme R su cui si sta integrando. Qualche volta sarà comodo indicare anche l'integrale su un intervallo $I = [a, b]$ di una funzione di una variabile con la nuova notazione:

$$\int_I f = \int_a^b f(x)dx.$$

Le proprietà elementari dell'integrale in $\mathbb{R}^2$ sono identiche a quelle note su $\mathbb{R}$ e si dimostrano nello stesso modo (non è vero, sono ancora più noiose): se $f, g : R \to \mathbb{R}$ sono due funzioni limitate integrabili su R valgono le proprietà seguenti:

- *Linearità:* per ogni α, β in $\mathbb{R}$, anche $\alpha f + \beta g$ è integrabile su R e
$$\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g;$$
- *Monotonia:* se $f \leq g$ allora anche
$$\int_R f \leq \int_R g;$$
- *Additività:* se R si spezza nell'unione di due rettangoli $R = R' \cup R''$ che non hanno punti interni in comune (ma solo punti di frontiera) allora
$$\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f.$$

Osservazione 1.5. Notiamo esplicitamente che è la seconda volta che scriviamo la frase "senza punti interni in comune".

Esempio 1.6. Sia $f(x, y) = 1$ su $R = [a, b] \times [c, d]$. La funzione f è evidentemente limitata, per cui ha senso chiedersi se sia integrabile o meno (sappiamo già la risposta, anche perché se le funzioni costanti non fossero integrabili, andremmo male...). Sia allora P una partizione di R qualsiasi. È chiaro che, qualsiasi sia S sottorettangolo di $\mathcal{S}_P$, si ha

$$\inf_S f(x,y) = 1 = \sup_S f(x,y)\,,$$

e quindi

$$\underline{s}(f,P) = \sum_{S\in\mathcal{S}_P} |S| = |R| = \sum_{S\in\mathcal{S}_P} |S| = \overline{s}(f,P)\,.$$

Ne segue pertanto che f è integrabile su R, ed il suo integrale vale

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = |R| = (b-a)\,(c-d)\,.$$

Con calcoli analoghi, si dimostra che se f assume il valore costante c su un rettangolo R, allora f è integrabile, ed il suo integrale vale $c\,|R|$.

Esempio 1.7. Sia ora $R = [0,1]\times[0,1]$ e

$$D(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in R\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\,,\\ 0 & (x,y)\in R\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\,. \end{cases}$$

È chiaro che, qualsiasi sia la partizione P del rettangolo R, e qualsiasi sia S in $\mathcal{S}_P$, si ha

$$\inf_S D(x,y) = 0\,,\qquad \sup_S D(x,y) = 1\,,$$

e quindi $\underline{s}(D,P) = 0$ e $\overline{s}(D,P) = |R|$. Ne segue che D non è integrabile.

Esempio 1.8. Notiamo che, data una qualsiasi funzione limitata f (integrabile o no) possiamo comunque stimare le somme superiori e inferiori come segue:

$$|R|\,\inf_R f \le \underline{\int_R} f \le \overline{\int_R} f \le |R|\,\sup_R f;$$

infatti tutte le somme inferiori sono maggiori di $|R|\inf f$ e tutte le somme superiori sono minori di $|R|\sup f$. Dalla formula precedente segue (come già abbiamo visto) che se f è costante, allora è integrabile.

Anche in più variabili una conseguenza immediata della definizione è il criterio di integrabilità:

Proposizione 1.9. *(Criterio di integrabilità) Sia $f : R \to \mathbb{R}$ limitata sul rettangolo R di $\mathbb{R}^2$. Allora f è integrabile su R se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione P_ϵ di R tale che*

$$\overline{s}(f,P_\epsilon) - \underline{s}(f,P_\epsilon) < \epsilon. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Se vale (1.1) per ogni $\epsilon > 0$, chiaramente l'integrale superiore e inferiore di f coincidono, quindi f è integrabile. Viceversa, se f è integrabile, dalla definizione di integrale inferiore e superiore otteniamo che per ogni ϵ fissato esistono due partizioni P' e P'' tali che

$$\int_R f = \underline{\int_R} f < \underline{s}(f, P') + \epsilon/2, \qquad \int_R f = \overline{\int_R} f > \overline{s}(f, P'') - \epsilon/2$$

da cui

$$\underline{s}(f, P') + \epsilon/2 > \overline{s}(f, P'') - \epsilon/2$$

e quindi se chiamiamo P_ϵ la partizione ottenuta unendo i punti di P', P'' otteniamo

$$\underline{s}(f, P_\epsilon) + \epsilon/2 \geq \underline{s}(f, P') + \epsilon/2 > \overline{s}(f, P'') - \epsilon/2 \geq \overline{s}(f, P_\epsilon) - \epsilon/2$$

da cui la tesi. ■

Il criterio precedente è molto utile per dimostrare altri teoremi, ma non ci consente ancora di distinguere nei casi concreti le funzioni integrabili secondo Riemann. Dimostreremo ora un criterio più efficace, che tuttavia richiede l'introduzione di un concetto nuovo: quello di insieme trascurabile (secondo Peano-Jordan).

DEFINIZIONE 1.10. Un insieme E di $\mathbb{R}^2$ si dice **trascurabile** (secondo Peano-Jordan) se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile ricoprire E con un numero finito di rettangoli $R_1, \dots, R_m$ tali che $|R_1| + \cdots + |R_m| < \epsilon$.

Notiamo subito che se E, F sono trascurabili anche $E \cup F$ e $E \cap F$ sono trascurabili, e che tutti i sottoinsiemi di un insieme trascurabile sono trascurabili.

ESERCIZIO 1.11. Un segmento parallelo a un asse è trascurabile. Un segmento non parallelo agli assi è trascurabile.

OSSERVAZIONE 1.12. Il grafico di una funzione continua su intervallo chiuso e limitato è trascurabile. Ricordiamo infatti che una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è integrabile secondo Riemann. Ciò vuol dire che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che, detti

$$\underline{s}(f, P_\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \min_{[t_i, t_{i+1}]} f(x) \, (t_{i+1} - t_i) \, , \qquad \overline{s}(f, P_\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \max_{[t_i, t_{i+1}]} f(x) \, (t_{i+1} - t_i) \, ,$$

si ha

$$0 < \overline{s}(f, P_\epsilon) - \underline{s}(f, P_\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} \big[\max_{[t_i, t_{i+1}]} f(x) - \min_{[t_i, t_{i+1}]} f(x) \big] \, (t_{i+1} - t_i) < \epsilon. \tag{1.2}$$

Consideriamo ora il rettangolo

$$R_i = [t_i, t_{i+1}] \times [\min_{[t_i,t_{i+1}]} f(x), \max_{[t_i,t_{i+1}]} f(x)]\,,$$

che ha come misura $[\max_{[t_i,t_{i+1}]} f(x) - \min_{[t_i,t_{i+1}]} f(x)]\,(t_{i+1} - t_i)$. È allora chiaro da (1.2) che

$$\sum_{i=0}^{n} |R_i| < \varepsilon\,,$$

e quindi che il grafico di f, che è contenuto nell'unione degli R_i, è trascurabile.

Possiamo ora enunciare il nostro criterio fondamentale:

TEOREMA 1.13. *Sia R un rettangolo e $f : R \to \mathbb{R}$ limitata. Indichiamo con E l'insieme di tutti i punti di R in cui f è discontinua. Se E è trascurabile, allora f è integrabile secondo Riemann su R.*

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema il Teorema di Heine-Cantor sull'uniforme continuità delle funzioni continue su insiemi chiusi e limitati:

TEOREMA 1.14. *Sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'insieme C chiuso e limitato. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di punti $x, y \in C$ con $|x - y| < \delta$ si ha $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Quindi supponiamo che esista un $\epsilon = \epsilon_0 > 0$ che viola la tesi, cioè tale che per quanto piccolo si prenda $\delta > 0$ si possano sempre trovare due punti con $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$. Allora prendendo successivamente $\delta = 1$, $\delta = 1/2$, $\delta = 1/3, \dots$, $\delta = 1/k, \dots$ otteniamo due successioni di punti x_k e y_k in C con

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k}, \qquad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \epsilon_0.$$

In particolare notiamo che

$$x_k - y_k \to 0.$$

Ora ricordiamo che dalla successione x_k contenuta nel chiuso limitato C è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto $x_0 \in C$. Estraiamo da y_k la successione corrispondente agli stessi indici; otteniamo quindi le successioni x_{k_j} e y_{k_j}, la prima delle quali converge a x_0. Siccome $x_{k_j} - y_{k_j}$ tende a zero, per il Teorema dei Carabinieri anche y_{k_j} tende a x_0. Si ha allora un assurdo dal fatto che $f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})$ tende a zero per la continuità della f, mentre la differenza $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})|$ si mantiene sempre maggiore di ϵ_0. ■

Dimostrazione. (del Teorema). Fissato $\epsilon > 0$, possiamo ricoprire l'insieme E di discontinuità di f con k rettangoli $R_1, \dots, R_k$ tali che $|R_1| + \cdots + |R_k| < \epsilon$. Notiamo che qualche punto $x \in E$ potrebbe cadere sul bordo di un R_j; per evitare che ciò accada basta ingrandire leggermente i lati di tutti i rettangoli senza superare l'area totale ϵ; quindi siamo in grado di ricopire E con k rettangoli $|R_1| + \cdots + |R_k| < \epsilon$ in modo che i punti di E siano *interni* all'unione dei rettangoli R_j.

Ora sia C la chiusura dell'insieme $R \setminus (R_1 \cup \cdots \cup R_k)$; la funzione f è continua su C, chiuso e limitato, quindi per il lemma precedente esiste un $\delta > 0$ tale che se $x, y \in C$ soddisfano $|x - y| < \delta$, si deve avere $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Costruiamo adesso una partizione di R nel modo seguente. Anzitutto mettiamo insieme tutti i vertici dei rettangoli R_j e chiamiamo P' la partizione di R che ne deriva. Chiaramente possiamo infittire questa partizione aggiungendo punti, in modo che i sottorettangoli S ottenuti siano arbitrariamente piccoli; in particolare possiamo richiedere che se x, y sono due punti dello stesso sottorettangolo S, allora $|x - y| < \delta$ (basta scegliere i lati dei sottorettangoli più piccoli di $\delta/\sqrt{2}$).

Riassumendo, abbiamo costruito una partizione P del rettangolo R in modo tale che la classe di tutti i sottorettangoli $\mathcal{S}_P$ si può dividere in due gruppi distinti S_P^1 e S_P^2:

i) primo tipo: i sottorettangoli S contenuti in qualche R_j. Indichiamo la classe di questi sottorettangoli con $\mathcal{S}_P^1$. Dato che l'unione di questi S è uguale all'unione di $R_1, \dots, R_k$ abbiamo che

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_P^1} |S| = |R_1| + \cdots + |R_k| < \epsilon. \tag{1.3}$$

ii) secondo tipo: tutti gli altri; indichiamo questa seconda classe con S_P^2. I sottorettangoli $S \in \mathcal{S}_P^2$ sono contenuti in C, e inoltre se $x, y \in S$ si ha $|x - y| < \delta$ e quindi $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ (in quanto f è continua su C).

Possiamo concludere la dimostrazione. Nella quantità

$$\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} |S| \cdot (\sup_S f - \inf_S f)$$

separiamo i termini con $S \in \mathcal{S}_P^1$ da quelli con $S \in \mathcal{S}_P^2$:

$$\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P^1} |S| \cdot (\sup_S f - \inf_S f) + \sum_{S \in \mathcal{S}_P^2} |S| \cdot (\sup_S f - \inf_S f).$$

Dato che f è limitata, cioè $|f| \leq M$, la prima somma si stima subito usando la (1.3):

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_P^1} |S| \cdot (\sup_S f - \inf_S f) \leq 2M \sum_{S \in \mathcal{S}_P^1} |S| < 2M\epsilon;$$

invece la seconda somma si può stimare osservando che f è continua su ogni $S \in \mathcal{S}_P^2$, quindi ha massimo e minimo in due punti $x, y \in S$:

$$\sup_S f - \inf_S f = f(x) - f(y)$$

ed essendo $|x - y| < \delta$ (per tutti i punti di S) concludiamo che

$$\sup_S f - \inf_S f = f(x) - f(y) < \epsilon$$

da cui

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_P^2} |S| \cdot (\sup_S f - \inf_S f) \leq \epsilon \sum_{S \in \mathcal{S}_P^2} |S| \leq |R|\epsilon.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che la somma delle aree di tutti i sottorettangoli della partizione non può superare l'area del rettangolo di partenza R. In conclusione

$$\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) < (M + |R|)\epsilon$$

e per l'arbitrarietà di ϵ, dal criterio di integrabilità segue la tesi. ∎

Osservazione 1.15. A patto di definire **rettangolo di** $\mathbb{R}^n$ il prodotto cartesiano di n intervalli di $\mathbb{R}$, e misura del rettangolo il prodotto delle lunghezze degli n intervalli, la teoria precedentemente introdotta si estende agevolmente al caso generale di $\mathbb{R}^n$.

2. Il Teorema di Fubini

Abbiamo definito l'integrale di Riemann per una funzione di due variabili, ma non abbiamo ancora un procedimento per calcolarlo. Un'idea molto naturale è la seguente: se vogliamo integrare $f(x, y)$ sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, potremmo provare ad integrare prima rispetto a x, poi rispetto a y:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

o anche nell'ordine opposto:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Queste quantità si chiamano gli *integrali iterati* della funzione f sul rettangolo R; chiaramente per molti tipi di funzione siamo in grado di calcolarli usando le regole già note per funzioni di una variabile, considerando, né più né meno come si fa per il calcolo delle derivate parziali, la variabile rispetto alla quale non si integra come una costante. Tuttavia c'è un problema: come possiamo essere sicuri che i due metodi diano lo stesso valore, e che questo valore sia uguale proprio all'integrale di f su R

precedentemente definito? E, inoltre, se siamo in grado di calcolare esplicitamente *uno solo* dei due integrali, chi ci dice che il procedimento è corretto?

Esempio 2.1. Supponiamo di avere la funzione $f(x,y) = y\,\mathrm{sen}(x+y)$ sul quadrato $[0,\pi] \times [0,\pi]$. Allora

$$\int_0^\pi f(x,y)\,dx = 2y\,\cos(y)\,,$$

mentre

$$\int_0^\pi f(x,y)\,dx = \pi\cos(x) - 2\mathrm{sen}(x)\,.$$

Integrando il primo rispetto ad y, si ha

$$\int_0^\pi 2y\,\cos(y)\,dy = -4\,,$$

mentre per il secondo

$$\int_0^\pi [\pi\cos(x) - 2\mathrm{sen}(x)]\,dx = -4\,.$$

Naturalmente non si tratta di un caso: in generale, l'integrale di f si può calcolare proprio come un integrale iterato, ed è indifferente l'ordine di integrazione, quindi ad esempio possiamo scegliere quello che rende il calcolo più facile. Il Teorema di Fubini ci dà delle condizioni su f sufficienti perché ciò accada:

Teorema 2.2. *Sia $R = I \times J$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$ e $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Supponiamo che f sia integrabile su R, e inoltre che per ogni $x \in I$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ sia integrabile su J. Allora la funzione*

$$x \mapsto \int_J f(x,y)dy$$

è integrabile su I, e il suo integrale è uguale all'integrale di f su R:

$$\int_R f = \iint_R f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx.$$

Un risultato analogo vale scambiando l'ordine degli integrali.

Premettiamo alla dimostrazione un Lemma (che in effetti è una versione ancora più generale del Teorema di Fubini):

Lemma 2.3. *Sia $R = I \times J$ un rettangolo, P una partizione di R, e $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora vale la disuguaglianza*

$$\underline{s}(f,P) \le \underline{\int_I} \left(\underline{\int_J} f(x,y)dy \right) dx \le \overline{\int_I} \left(\overline{\int_J} f(x,y)dy \right) dx \le \overline{s}(f,P).$$

Dimostrazione. Notiamo subito che la disuguaglianza centrale è ovvia; le disuguaglianze da dimostrare sono la prima e l'ultima.

Data la partizione $P = \{P_1, P_2\}$, ogni sottorettangolo $S \in \mathcal{S}_P$ è della forma $S = S_1 \times S_2$ con $S_1 \in \mathcal{S}_{P_1}$ e $S_2 \in \mathcal{S}_{P_2}$. Quindi possiamo scrivere

$$\underline{s}(f, P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} |S| \cdot \inf_S f \le \sum_{S_1 \in \mathcal{S}_{P_1}} |S_1| \left(\sum_{S_2 \in \mathcal{S}_{P_2}} |S_2| \cdot \inf_{S_1 \times S_2} f \right) \tag{2.1}$$

essendo $|S| = |S_1| \cdot |S_2|$. Ora possiamo osservare che, per ogni $x \in S_1$ fissato,

$$|S_2| \cdot \inf_{y \in S_2} f(x, y) \le \underline{\int_{S_2}} f(x, y) dy$$

(vedi l'Esempio 1.8) e quindi prendendo l'estremo inferiore per $x \in S_1$

$$|S_2| \cdot \inf_{S_1 \times S_2} f \le \inf_{x \in S_1} \underline{\int_{S_2}} f(x, y) dy.$$

Introducendo questa disuguaglianza nella (2.1) otteniamo

$$\underline{s}(f, P) \le \sum_{S_1 \in \mathcal{S}_{P_1}} |S_1| \left(\sum_{S_2 \in \mathcal{S}_{P_2}} \inf_{S_1} \underline{\int_{S_2}} f \right) \le \sum_{S_1 \in \mathcal{S}_{P_1}} |S_1| \inf_{S_1} \sum_{S_2 \in \mathcal{S}_{P_2}} \underline{\int_{S_2}} f$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estremo inferiore di una somma di funzioni è maggiore della somma degli estremi inferiori. Infine basta osservare che

$$\sum_{S_2 \in \mathcal{S}_{P_2}} \underline{\int_{S_2}} f = \underline{\int_J} f(x, y) dy$$

per l'additività dell'integrale inferiore (a dire il vero abbiamo enunciato questa proprietà per l'integrale, ma la dimostrazione per l'integrale inferiore è analoga, anzi più facile) e otteniamo

$$\underline{s}(f, P) \le \sum_{S_1 \in \mathcal{S}_{P_1}} |S_1| \inf_{S_1} \underline{\int_J} f.$$

La somma a secondo membro è proprio la somma inferiore, per la partizione P_1, della funzione $g(x) = \underline{\int_J} f$, e quindi per definizione di integrale inferiore

$$\sum_{S_1 \in \mathcal{S}_{P_1}} |S_1| \inf_{S_1} \underline{\int_J} f = \underline{s}(g, P_1) \le \underline{\int_I} g = \underline{\int_I} \Big(\underline{\int_J} f(x, y) dy \Big) dx$$

cioè abbiamo dimostrato la prima disuguaglianza del Lemma. L'ultima disuguaglianza si prova in modo analogo (sostituendo gli inf con dei sup e rovesciando le disuguaglianze). ∎

Dimostrazione. (del Teorema di Fubini). Si tratta di una facile applicazione del Lemma. Infatti, consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_J f(x,y)dy \equiv \underline{\int_J} f(x,y)dy \equiv \overline{\int_J} f(x,y)dy$$

(gli integrali coincidono perché per ipotesi f è integrabile in y per ogni x fissato). Allora dal Lemma segue che per ogni partizione P di R

$$\underline{s}(f,P) \leq \underline{\int_I} g \leq \overline{\int_I} g \leq \overline{s}(f,P).$$

D'altra parte, sappiamo anche che f è integrabile su R, quindi usando il criterio di integrabilità vediamo che per ogni $\epsilon > 0$ fissato possiamo scegliere P in modo che $\overline{s}(f,P) - \underline{s}(f,P) < \epsilon$; quindi si deve avere anche

$$\overline{\int_I} g - \underline{\int_I} g < \epsilon$$

e per l'arbitrarietà di ϵ questo vuol dire che g è integrabile su I. Inoltre abbiamo dimostrato che per ogni partizione P si ha

$$\underline{s}(f,P) \leq \int_I \Big(\int_J f(x,y)dy \Big) dx \leq \overline{s}(f,P)$$

e questo vuol dire anche che

$$\int_R f = \int_I \Big(\int_J f(x,y)dy \Big) dx$$

(perché?), ossia la tesi. La dimostrazione della formula con x e y scambiati è identica.

■

Esempio 2.4. Consideriamo la funzione $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{xy}$ sul quadrato $E = [1,2] \times [1,2]$. Se scriviamo

$$\iint_E f(x,y) = \int_1^2 \left(\int_1^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\,dx \right) dy = \int_1^2 [\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^{y}]\,dy\,,$$

e quest'ultimo integrale è di facile calcolo. Se, invece, avessimo scritto

$$\iint_E f(x,y) = \int_1^2 \left(\int_1^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\,dy \right) dx\,,$$

ci saremmo trovati a dover calcolare

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x[1 - x + \mathrm{e}^x(2x-1)]}{x^2}\,dx\,,$$

che non si sa fare...

OSSERVAZIONE 2.5. Un analogo del teorema di Fubini vale in dimensione qualsiasi, anche se evidentemente sono possibili più "riduzioni". Se, ad esempio, abbiamo una funzione $f(x, y, z)$ definita ed integrabile su un rettangolo $R = I \times J \times K$, allora

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_I \left(\int_J \left(\int_K f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx\,,$$

ma anche

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_J \left(\int_K \left(\int_I f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy\,,$$

e (soprattutto)

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_I \left(\iint_{J\times K} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx\,.$$

3. Derivazione sotto il segno di integrale

Sia $f : R = I \times J \to \mathbb{R}$ una funzione continua; è allora ben definita la funzione

$$g(x) = \int_J f(x,y)\,dy\,.$$

Quali proprietà di regolarità ha g? È continua? È derivabile? In questo paragrafo risponderemo a queste domande, dando le ipotesi corrette su f.

TEOREMA 3.1. *Sia $f : R = I \times J \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora g è continua su I.*

Dimostrazione. Essendo f continua su R, chiuso e limitato, allora è uniformemente continua (si veda il Teorema 1.14). Pertanto, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono in R, con $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta_\epsilon$, allora $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$. Sia ora x_n in I convergente a x_0 in I. Allora

$$|g(x_n) - g(x)| \le \int_J |f(x_n, y) - f(x, y)|\,dy\,.$$

Fissato $\epsilon > 0$, sia n_ϵ tale che $|x_n - x_0| < \delta_\epsilon$ per ogni $n \ge n_\epsilon$. Allora, per ogni y in J, $d_2((x_n, y), (x_0, y)) < \delta_\epsilon$, e quindi $|f(x_n, y) - f(x, y)| < \epsilon$. Pertanto,

$$|g(x_n) - g(x)| \le \int_J \epsilon\,dy = \epsilon\,|J|\,,$$

da cui segue che $g(x_n)$ converge a $g(x_0)$. ∎

Se facciamo un'ipotesi ulteriore su f, allora g è anche derivabile.

TEOREMA 3.2. *Sia $f : R = I \times J \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e supponiamo che esista $f_x : R = I \times J \to \mathbb{R}$, anche essa continua. Allora g è derivabile su I e si ha*

$$g'(x) = \int_J f_x(x, y)\, dy\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $I = [a, b]$, e sia s in $[a, b]$. Definiamo

$$k(x) = \int_J f_x(x, y)\, dy\,, \qquad h(s) = \int_{[a,s]} \left(\int_J f_x(x, y) \right) dx\,.$$

Siccome $f_x(x, y)$ è continua per ipotesi, la funzione k è continua per il teorema precedente. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, h è una funzione derivabile, e la sua derivata è proprio $k(s)$. D'altra parte, essendo verificate le ipotesi, è possibile applicare il Teorema di Fubini:

$$h(s) = \iint_{[a,s]\times J} f_x(x, y)\, dx\, dy = \int_J \left(\int_{[a,s]} f_x(x, y)\, dx \right) dy\,.$$

Ora, sempre per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_{[a,s]} f_x(x, y)\, dx = f(s, y) - f(a, y)\,,$$

e quindi

$$h(s) = \int_J [f(s, y) - f(a, y)]\, dy = g(s) - g(a)\,.$$

Ne segue allora che $g(s) = h(s) + h(a)$ è derivabile e che $g'(s) = k(s)$, come volevasi dimostrare. ∎

OSSERVAZIONE 3.3. Risultati analoghi valgono nel caso in cui si abbiano funzioni della forma

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \iint_{R'} f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\, dy_1 \ldots dy_m\,,$$

con R' rettangolo di $\mathbb{R}^m$, e $(x_1, \ldots, x_n)$ in un rettangolo R di $\mathbb{R}^n$.

4. L'integrale su insiemi misurabili

Dato un insieme C limitato, la sua *funzione caratteristica* è la funzione che vale 1 su C e 0 fuori:

$$\mathbf{1}_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C \\ 0 & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

È facile verificare che l'insieme dei punti di discontinuità di $\mathbf{1}_C$ in $\mathbb{R}^n$ è esattamente la frontiera di C (perché?).

In genere $\mathbf{1}_C$ non è integrabile secondo Riemann; ad esempio, la generalizzazione della funzione di Dirichlet studiata nell'Esempio 1.7 è la funzione caratteristica di $([0,1]\times[0,1])\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$; ma ricordando il Teorema 1.13 otteniamo subito che se C è limitato e la sua frontiera ∂C è trascurabile, allora $\mathbf{1}_C$ è integrabile secondo Riemann. In questo caso si usa anche la notazione

$$m(C)=\int \mathbf{1}_C$$

e la quantità $m(C)$ si chiama la *misura secondo Peano-Jordan* dell'insieme C, mentre un insieme C limitato con frontiera trascurabile si dice anche *misurabile secondo Peano-Jordan*.

Più in generale, consideriamo una funzione $f : R \to \mathbb{R}$ definita e continua su un rettangolo R, e sia $C \subseteq R$ con frontiera trascurabile. Allora la funzione $f \cdot \mathbf{1}_C$ può essere discontinua solo nei punti di ∂C (perché?), quindi f è integrabile secondo Riemann. L'integrale di $f \cdot \mathbf{1}_C$ si indica anche con le notazioni

$$\int_C f = \iint_C f(x,y)dxdy = \int f\cdot \mathbf{1}_C$$

e si chiama *l'integrale di f su C*. Notare che non era necessario partire da una funzione continua su tutto il rettangolo R: basta considerare una funzione $f : C \to \mathbb{R}$ continua (su C), ed estendere f ponendo $f(x) = 0$ per $x \notin C$; il risultato è esattamente lo stesso.

Se la forma del dominio C è descritta in modo esplicito, ad esempio il bordo di C è il grafico di una funzione nota, possiamo dare un procedimento generale per calcolare l'integrale di una funzione su C. Precisiamo i domini che ci interessano:

DEFINIZIONE 4.1. Un **dominio normale** è un insieme del tipo

$$D = D(a,b;\phi,\psi) = \{(x,y)\colon a\le x\le b,\ \phi(x)\le y\le \psi(x)\}$$

dove $a \le b$, e ϕ,ψ sono due funzioni continue su $[a,b]$ con la proprietà $\phi(x)\le\psi(x)$ per ogni x. Naturalmente anche un insieme del tipo

$$\{(x,y)\colon c\le y\le d,\ \phi(y)\le x\le\psi(y)\}$$

si chiama dominio normale. Quando è necessario distinguere si parla di dominio normale "rispetto a x" o "rispetto a y".

Notiamo che la frontiera di D è composta di quattro parti: il grafico di ϕ, il grafico di ψ, e due segmenti verticali corrispondenti a $x = a$ e $x = b$ (che eventualmente possono ridursi a due punti, quando $\phi(a) = \psi(a)$ oppure $\phi(b) = \psi(b)$).

In particolare, la frontiera di un dominio normale è sempre trascurabile (Esercizio 1.11 e Osservazione 1.12).

L'ultima osservazione ci permette subito di affermare che se $D = D(a, b; \phi, \psi)$ è un dominio normale e $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f è integrabile su D. Ma possiamo fare molto di più. Anzitutto D è contenuto in un rettangolo $R = [a, b] \times [m, M]$ (ad esempio possiamo prendere m uguale al minimo di ϕ e M uguale al massimo di ψ), e per il Teorema di Fubini

$$\int_D f \equiv \int_R f \cdot \mathbf{1}_D = \int_a^b \Big(\int_m^M f(x, y) \mathbf{1}_D(x, y)\, dy \Big) dx.$$

Ma per x fissato, è chiaro che

$$\int_m^M f(x, y)\mathbf{1}_D(x, y)\, dy \equiv \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

perché l'integrando vale 0 se $y > \psi(x)$ oppure $y < \phi(x)$. In altri termini abbiamo ottenuto la formula esplicita

$$\int_D f = \int_a^b \Big(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \Big) dx, \qquad D = D(a, b; \phi, \psi)$$

che si chiama **formula di riduzione** per gli integrali doppi su un dominio normale. Ovviamente una formula analoga vale per domini normali rispetto a y:

$$\int_D f = \int_c^d \Big(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \Big) dy, \qquad D = D(a, b; \phi, \psi).$$

Osservazione 4.2. Le stesse formule di riduzione valgono per integrali su sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Se, ad esempio,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E\,,\ a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\}\,,$$

con E dominio di $\mathbb{R}^2$ e $a(x, y)$ e $b(x, y)$ due funzioni continue su E, allora

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_E \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy\,.$$

Se anche E è un dominio normale (rispetto ad uno dei due assi), allora anche l'integrale su E potrà essere "ridotto" a due integrali unidimensionali; se ad esempio

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\,,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}\,,$$

allora

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx\,.$$

5. Risultati ulteriori

5.1. Cambiamento di variabili.

TEOREMA 5.1. *(Cambiamento di variabili per integrali multipli) Sia A aperto di $\mathbb{R}^n$, $g : A \to \mathbb{R}^n$ iniettiva di classe C^1. Allora per ogni f integrabile su $g(A)$ si ha*

$$\int_{g(A)} f(y)dy = \int_A f \circ g \cdot |\det Dg| dx.$$

ESEMPIO 5.2. Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^1([a, b])$, iniettiva. Allora la formula precedente diventa

$$\int_{g([a,b])} f(y)\, dy = \int_{[a,b]} f(g(x))\, |g'(x)|\, dx\,.$$

Questa formula non è propriamente "nuova". Ha infatti, almeno ad una prima occhiata, una forte rassomiglianza con la formula di integrazione per sostituzione:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx\,.$$

In effetti, le due formule sono la stessa. Perché? Perché quando scriviamo $g([a, b])$, intendiamo con questa notazione l'intervallo immagine di $[a, b]$ tramite g, scritto nell'ordine "corretto"; ovvero $[g(a), g(b)]$ se g è crescente, $[g(b), g(a)]$ se g è decrescente. Ma nel primo caso $|g'(x)| = g'(x)$, mentre nel secondo $|g'(x)| = -g'(x)$, ed ecco che (miracolosamente) i segni sono tornati a posto...

ESEMPIO 5.3. Sia ora $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con $g(x) = M\, x + b$, M essendo una matrice invertibile, e b un vettore qualsiasi. In questo caso, $\det(Dg(x)) = \det(M)$, e quindi

$$\int_{g(A)} f(y)\, dy = \int_A f(A\, x)\, |\det(M)|\, dx\,.$$

Nel caso particolare in cui $f \equiv 1$, la formula precedente diventa

$$m(g(A)) = |\det(M)|\, m(A)\,,$$

da cui segue che il fattore $|\det(M)|$ rappresenta il fattore di scala con il quale vengono trasformate le aree (volumi, ...) dall'applicazione lineare g. Siccome i primi termini dello sviluppo di Taylor di una qualsiasi applicazione C^1 sono

$$g(x) = g(x_0) + Dg(x_0)\, (x - x_0)\,,$$

la quantità $|\det(Dg(x))|$ rappresenta la variazione infinitesima di area (volume, ...) (in questo modo si capisce anche la formula, più o meno...). Tale fatto è ulteriormente chiarito dalla scelta di $f = \mathbf{1}_E$ nel Teorema 5.1: in tal caso si ottiene

$$m(E) = \int_{g^{-1}(E)} |\det(Dg(x))|\, dx\,.$$

Esempio 5.4. Il Teorema 5.1 continua a valere anche quando la funzione g non è iniettiva, ma l'insieme su cui g non è iniettiva ha misura zero (ovvero, è trascurabile). Il caso più usato di questa versione del teorema è quello delle coordinate polari: sia D un dominio in $\mathbb{R}^2$, e scriviamo $x = \rho\,\cos(\theta)$, $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$ (si noti che la trasformazione non è iniettiva solo per $(\rho, \theta) = (0, \theta)$, e che tale segmento ha misura nulla). In questo modo

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \rho\,\cos(\theta) \end{pmatrix}\,,$$

da cui $|\det(Dg(\rho, \theta))| = |\rho| = \rho$. Si ha allora

$$\int_{g(A)} f(y)\, dy = \int_A f(\rho\,\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))\, \rho\, d\rho\, d\theta\,.$$

Se, ad esempio, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, allora $D = g(D')$, con

$$D' = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\ 1 \leq \rho \leq 2\}\,,$$

e quindi

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\rho\,\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))\, \rho\, d\rho\, d\theta\,.$$

Esempio 5.5. Vediamo ora un'applicazione sorprendente dell'esempio precedente: calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\,,$$

integrale improprio che sappiamo essere finito, ma che non sappiamo calcolare dal momento che non abbiamo a disposizione un primitiva esplicita di e^{-x^2}. Iniziamo con l'osservare che si ha

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\right) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, dy\right) \\ &= \iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\,, \end{aligned}$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$. Passando a coordinate polari, si ha $D = g(D')$, con

$$D' = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ \rho \geq 0\}\,,$$

cosicché
$$\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{D'} \mathrm{e}^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta\,.$$
Ora, per le formule di riduzione,
$$\iint_{D'} \mathrm{e}^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}\,d\theta = \frac{\pi}{4}\,.$$
Pertanto,
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$
e quindi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

5.2. Integrale di superficie. L'integrale di superficie su una superficie in forma parametrica $\phi : \overline{A} \to S$ è definito dalla formula
$$\int_S f\,d\sigma = \int_{\overline{A}} f \circ \phi \cdot \sqrt{\det(D\phi^T D\phi)}\,dt.$$

Per una superficie C^1 a tratti, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_N$, si ha
$$\int_S f\,d\sigma = \int_{S_1} f\,d\sigma + \cdots + \int_{S_N} f\,d\sigma.$$

Il caso più interessante è quello di una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$ di dimensione m in forma cartesiana, ossia quando k variabili sono espresse in funzione delle restanti m: $x_{m+1} = \psi_1(x_1, \ldots, x_m)$, $\ldots$, $x_{m+k} = \psi_k(x_1, \ldots, x_m)$. Si tratta come è noto di un caso particolare della forma parametrica $\phi(t)$, basta porre $\phi_1(t) = t_1$, $\ldots$, $\phi_m(t) = t_m$ e invece $\phi_{m+j}(t) = \psi_j(t)$. Dunque abbiamo $\phi = (I_m, \psi)$ [I_m è l'applicazione identica da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^m$], da cui
$$D\phi = \begin{pmatrix} I_m \\ D\psi \end{pmatrix}, \qquad D\phi^T D\phi = \begin{pmatrix} I_m & D\psi^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m \\ D\psi \end{pmatrix} = I_m + D\psi^T D\psi$$
e quindi, scrivendo $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $\phi(x) = (x', \psi(x'))$,
$$\int_S f\,d\sigma = \int_{\overline{A}} f(x', \psi(x'))\sqrt{\det(I_m + D\psi^T D\psi)}\,dx_1 \ldots dx_m.$$
Ad esempio, se $x_3 = \psi(x_1, x_2)$ è una superficie di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$,
$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1\psi & D_2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ D\psi \end{pmatrix},$$

quindi $D\phi^T D\phi$ è dato da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & D_1\psi \\ 0 & 1 & D_2\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1\psi & D_2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(D_1\psi)^2 & D_1\psi D_2\psi \\ D_1\psi D_2\psi & 1+(D_2\psi)^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det(D\phi^T D\phi) = 1 + (D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2$$

e quindi

$$\int_S f(x)\, d\sigma = \int_{\overline{A}} f(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))\sqrt{1 + (D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2}\, dx_1 dx_2.$$

In particolare l'area di S è data da

$$\int_S 1\, d\sigma = \int_{\overline{A}} \sqrt{1 + (D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2}\, dx_1 dx_2.$$

Analogamente se $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ è una superficie di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^n$, in forma cartesiana, si ha

$$\int_S f(x) d\sigma = \int_{\overline{A}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi(x'))\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} (D_j\psi)^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Quando $m = 1$, ossia quando $S = \gamma$ è una curva, l'integrale di superficie si dice anche *integrale di linea*; se la curva è parametrizzata come $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, si ha $D\phi^T D\phi = |\phi'|^2$, quindi

$$\int_\gamma f(x)\, d\sigma = \int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)|\, dt\,,$$

ritrovando così la formula nota; nel caso di una curva in $\mathbb{R}^2$ in forma cartesiana, ossia $\phi = (x, \psi(x))$, abbiamo

$$\int_\gamma f\, d\sigma = \int_a^b f(x, \psi(x))\sqrt{1 + \psi'(x)^2}\, dx.$$

Notiamo che $\partial B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ è il luogo di zeri di $F(x) = |x - x_0|^2$, quindi è una superficie regolare semplice espressa in forma implicita. In particolare è definita la misura di superficie su di essa. Sia ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e sommabile; allora per ogni x_0 vale la formula

$$\int f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f(x) d\sigma \right) dr$$

detta espressione dell'integrale in *coordinate polari*. Dalla formula precedente segue che per ogni $r > 0$

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0,r)} f(x)dx\right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f(x)d\sigma.$$

La formula precedente è solo un caso particolare della *formula di coarea*: sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'altra funzione di classe C^1 tale che per quasi ogni r gli insiemi di livello

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ u(x) = r\}$$

sono superfici regolari semplici di dimensione $n-1$, allora

$$\int f(x)\,|Du|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\{u=r\}} f(x)d\sigma\right)dr$$

(omettiamo le dimostrazioni). Ad esempio scegliendo $u(x) = |x|$ otteniamo la formula per coordinate polari.

5.3. La formula di Gauss-Green. In dimensione 1, il teorema fondamentale del calcolo ci dice che se f è una funzione di classe $C^1([a,b])$, allora

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,.$$

Il risultato $f(b) - f(a)$ può essere interpretato come una sorta di "integrale 0-dimensionale", pensandolo come $1 \cdot f(b) + (-1) \cdot f(a)$. Se pensiamo a 1 e -1 rispettivamente come "versori" normali esterni all'intervallo $[a,b]$, possiamo interpretare il teorema fondamentale del calcolo come

$$\int_{[a,b]} f'(x)\,dx = \int_{\partial[a,b]} f(x)\,\nu\,,$$

dove con ν abbiamo denotato la normale esterna all'intervallo $[a,b]$. Ci chiediamo ora se tale risultato sia valido in dimensioni maggiori di 1, evidentemente interpretando le derivate nella maniera corretta.

Il primo risultato è il seguente

TEOREMA 5.6. *sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio normale $D = D(a,b;\phi,\psi)$, con ϕ e ψ di classe $C^1([a,b])$. Sia f in $C^1(D)$. Allora*

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{+\partial D} f\,dy \tag{5.1}$$

e

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{+\partial D} f\,dx \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Iniziamo con il caso in cui D sia normale rispetto all'asse y:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b\,,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}\,.$$

Allora abbiamo, per le formule di riduzione,

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \right) dy\,,$$

e, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)\,,$$

cosicché

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_a^b [f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)]\, dy\,.$$

Parametrizziamo ora $\gamma = +\partial D$. Abbiamo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, con

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = \alpha(t) \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [b, a]\,, \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = a \end{cases} \qquad t \in [\alpha(a), \beta(a)]\,.$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = \beta(t) \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [a, b]\,, \qquad \gamma_4 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = b \end{cases} \qquad t \in [\beta(b), \alpha(b)]\,.$$

Se integriamo lungo γ la forma differenziale $\omega(x, y) = f(x, y)\, dy$, l'integrale lungo $\gamma_2 \cup \gamma_4$ è nullo (dato che $y'(t) \equiv 0$). Si ha pertanto

$$\int_{+\partial D} f\, dy = \int_b^a f(\alpha(t), t)\, dt + \int_a^b f(\beta(t), t)\, dt\,,$$

che è esattamente il risultato ottenuto in precedenza.

Supponiamo ora che D sia normale rispetto all'asse x:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b\,,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}\,.$$

In questo caso è necessario ricorrere ad una funzione ausiliaria; sia (x, y) in D e sia $\gamma_{x,y}$ la curva data da $\gamma_1 \cup \gamma_2$, con

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \alpha(t) \end{cases} \qquad t \in [a, x]\,, \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [\alpha(x), y]\,.$$

Definiamo

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{x,y}} f\, dy = \int_a^x f(t, \alpha(t))\, \alpha'(t)\, dt + \int_{\alpha(x)}^y f(x, t)\, dt\,.$$

Si ha, per il teorema fondamentale del calcolo, e derivando sotto l'integrale (Teorema 3.2),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x) = \int_{\alpha(x)}^{y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\,,$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f(x,y)\,.$$

D'altra parte, essendo la forma differenziale $dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$ esatta, e $+\partial D$ chiusa, si ha

$$\int_{+\partial D} dF = 0\,,$$

e quindi

$$\int_{+\partial D} f\,dy = \int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = -\int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,.$$

Esplicitando $+\partial D$ tramite la parametrizzazione $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, con

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \alpha(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]\,, \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [\alpha(b), \beta(b)]\,.$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \beta(t) \end{cases} \quad t \in [b,a]\,, \qquad \gamma_4 : \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [\beta(a), \alpha(a)]\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x}\,dx &= \int_a^b \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,ds\,dt + \int_b^a \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,ds\,dt \\ &= -\int_a^b \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,ds\,dt\,. \end{aligned}$$

Pertanto, per le formule di riduzione,

$$\int_{+\partial D} f\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,ds\,dt = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,.$$

La formula (5.2) si dimostra in maniera analoga. ∎

Ricordando che se D è un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ (ovvero un aperto limitato la cui frontiera sia una curva localmente C^1), allora D è decomponibile come unione finita di domini normali regolari, abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5.7. *(Formule di Gauss-Green) Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e sia f di classe $C^1(D)$. Allora*

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{+\partial D} f\,dy \tag{5.3}$$

e

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{+\partial D} f\, dx \tag{5.4}$$

Ricordando che la misura $m(D)$ di un insieme è l'integrale di $\mathbf{1}_D$, dalle (5.3) e (5.4) abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 5.8. *Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$m(D) = \int_{+\partial D} x\, dy = -\int_{+\partial D} y\, dx = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} (x\, dy - y\, dx)\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare le (5.3) e (5.4) con $f(x,y) = x$ e $f(x,y) = y$ rispettivamente. ∎

ESERCIZIO 5.9. Perché applicare (ad esempio) la (5.3) con $f(x,y) = x + c$, c numero reale qualsiasi, dà luogo allo stesso risultato?

OSSERVAZIONE 5.10. Se D contiene l'origine, e la frontiera di D è espressa in coordinate polari come $\rho = \rho(\theta)$, con θ variabile in $[0, 2\pi]$, si ha $x(\theta) = \rho(\theta), \cos(\theta)$ e $y(\theta) = \rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$. Pertanto,

$$x\, dy = \rho(\theta)\ \cos(\theta)\,[\rho'(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \rho(\theta)\ \cos(\theta)]$$

e

$$y\, dx = \rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,[\rho'(\theta)\ \cos(\theta) - \rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta)]\,,$$

e quindi

$$m(D) = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} (x\, dy - y\, dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta\,.$$

È evidente che, essendo $D = \{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le \rho \le \rho(\theta)\}$, la stessa formula si ottiene usando le coordinate polari:

$$m(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta\,.$$

Un'importante conseguenza delle formule di Gauss-Green è il seguente teorema, che generalizza al caso bidimensionale il teorema fondamentale del calcolo.

TEOREMA 5.11. *(Teorema della divergenza) Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, e sia $F = (F_1, F_2) : D \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione di classe $C^1(D)$. Allora*

$$\iint_D \operatorname{div}(F)\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{+\partial D} (F_1\, \nu_1 + F_2\, \nu_2)\ ds\,,$$

dove (ν_1, ν_2) *è la normale esterna a* D *e l'integrale è parametrizzato secondo l'ascissa curvilinea: se* $\gamma = +\partial D$ *è data da*

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]\,,$$

allora si definisce

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt\,,$$

la lunghezza della curva da $\gamma(a)$ *a* $\gamma(t)$*, e si sceglie* s *come nuovo parametro (lo si può fare perché* $s(t)$ *è monotona crescente).*

Dimostrazione. Applichiamo (5.3) e (5.4):

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{+\partial D} [F_1\, dy - F_2\, dx]\,.$$

Supponiamo ora che la frontiera di D, orientata nel verso positivo, abbia una parametrizzazione della forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Allora il vettore tangente è $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, e quindi il vettore normale esterno è $n(t) = (y'(t), -x'(t))$, cosicché il versore normale è dato da

$$\nu(t) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, -\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right)\,.$$

Pertanto, lungo la frontiera di D,

$$F_1\, \nu_1 + F_2\, \nu_2 = \frac{F_1(x(t), y(t))\, y'(t) - F_2(x(t), y(t))\, x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}\,,$$

mentre

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} (F_1\, \nu_1 + F_2\, \nu_2)\; ds &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t))\, y'(t) - F_2(x(t), y(t))\, x'(t)]\, dt \\ &= \int_{+\partial D} [F_1\, dy - F_2\, dx]\,, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. Se la frontiera di D è l'unione di più curve regolari a tratti, si "spezzano" gli integrali sui differenti sottodomini di D ottenuti dalle varie parti di $+\partial D$, e si ottiene lo stesso risultato per additività. ∎