Capitolo 3

Equazioni semi-lineari con dato in $L^2(\Omega)$, $L^{(2^*)'}(\Omega)$

Lo scopo principale di questo capitolo è esporre alcuni risultati concernenti il problema:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) \;=\; g(u) + f & \text{in } \Omega \\ u \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

nel caso in cui:

- $f \in L^2(\Omega)$
- $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, sia una funzione continua a crescita lineare
- $A(x)$ sia una matrice simmetrica uniformemente ellittica costituita da elementi limitati, cioè:

  i) $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,..,N}$, $a_{ij} \;:\; \Omega \to \mathbf{R}$

  ii) esistono α, Λ numeri reali strettamente positivi tali che: $\alpha|\xi|^2 \leq (A(x)\xi|\xi) \leq \Lambda|\xi|^2$ qualsiasi sia $\xi \in \mathbf{R}^N$

  iii) $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ qualsiasi siano $i, j \in \{1, .., N\}$

Al fine di poter sfruttare i suddetti risultati nello studio del problema (3.1) quando i dati siano in $L^1(\Omega)$; la trattazione di questo ultimo caso ci occuperà, tuttavia, nel successivo capitolo, pertanto possiamo pensare a questo capitolo come ad una raccolta di premesse.
Da ora in avanti, per snellire le notazioni, si indicherà con L, l'operatore $-\mathrm{div}(A(x)\nabla\,\cdot\,)$

3.1 Il problema agli autovalori

Consideriamo $b : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $b \in L^{\infty}(\Omega)$ e tale che esiste $\beta \in \mathbf{R}^{+}$ con:

$$b(x) \geq \beta > 0.$$

Sussiste il seguente:

Teorema 3.1.1. *Esiste una successione* $\{\lambda_i = \lambda_i(b)\}_{i \in \mathbf{N}}$ *monotona non decrescente e tale da divergere a* $+\infty$ *e, qualsiasi sia* $i \in \mathbf{N}$ *esiste* $\varphi_i \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$*, tale che* φ_i *soddisfa in senso debole:*

$$\begin{cases} L(\varphi_i) = \lambda_i(b) b(x) \varphi_i & \text{in } \Omega \\ \\ \varphi_i = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega} b(x) {\varphi_i}^2 dx = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

e $\int_{\Omega} b(x) \varphi_i \varphi_j dx = 0$*, se* $i \neq j$*; inoltre ognuna delle* φ_i*, genera un "autospazio", che sarà indicato con* $E_i(b)$ *(anche quando il corrispondente autovalore non sia semplice).*
Per quanto riguarda $\lambda_1(b)$*, si ha:*

1) $\varphi_1(b)$ *ha segno costante.*

2) $E_1(b)$ *ha dimensione 1, ovvero* $\lambda_1(b)$ *é semplice.*

Se $b_1, b_2 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$*, sono due funzioni tali che:*

$$b_1 > b_2 \quad q.o.,$$

allora $\lambda_i(b_1) < \lambda_i(b_2)$*.*
Se invece $b(x) = \lambda_j(1)$*, allora:*

$$\lambda_i(b) = \frac{\lambda_i(1)}{\lambda_j(1)}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\lambda_i(b) = \inf_{\substack{w \in H_0^1(\Omega) \\ w \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} A(x) \nabla w \nabla w dx}{\int_{\Omega} b(x) w^2 dx} \right\}$$

La prima cosa che ci proponiamo di far vedere è che $\lambda_1(b)$ è un minimo. Osserviamo che, qualora esistesse $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$ tale che:

$$\lambda_1(b) = \frac{\int_{\Omega} A(x) \nabla w \nabla w dx}{\int_{\Omega} b(x) w^2 dx}$$

e cioè qualora in w si realizzasse il minimo che stiamo cercando, allora la funzione $\varphi(b) = \frac{w}{\left(\int_{\Omega} b(x) w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}$ sarebbe tale che:

i) $\lambda_1(b) = \int_\Omega A(x)\nabla\varphi(b)\nabla\varphi(b)dx$

ii) $\int_\Omega b(x)\varphi(b)^2dx = 1$

Pertanto, possiamo limitarci a dimostrare che:

$$\lambda_1(b) = \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \int_\Omega b(x)v^2dx}} \left\{\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx\right\}$$

è un minimo.
Consideriamo $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, successione minimizzante, cioè tale che:

$$\int_\Omega b(x){u_n}^2dx = 1$$

e soprattutto tale da soddisfare:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A(x)\nabla u_n\nabla u_n dx = \lambda_1(b)$$

detta $a_n = \int_\Omega A(x)\nabla u_n\nabla u_n dx$, grazie al fatto che a_n è convergente, sappiamo che esiste $M \in \mathbf{R}^+$, tale che: $a_n < M$. Ma essendo $A(x)$ una matrice uniformemente ellittica, possiamo asserire che:

$$\|u_n\|_{1,0} \ \leq \ \left(\frac{M}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pertanto esistono $\{u_{n_k}\} \subset H_0^1(\Omega)$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$ tali che u_{n_k} converge debolmente ad u in $H_0^1(\Omega)$, ma allora, qualsiasi sia φ in $H_0^1(\Omega)$, si ha:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla\varphi dx = \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla\varphi dx \tag{3.3}$$

sfruttando l'uniforme ellitticità di A, si ottiene:

$$0 \ \leq \ \int_\Omega A(x)\nabla(u_{n_k}-u)\nabla(u_{n_k}-u)dx \ =$$

$$= \int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla u_{n_k}dx \ - \ 2\int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla u dx \ + \ \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla u dx$$

e cioè:

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla u_{n_k}dx \ \geq \ 2\int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla u dx \ - \ \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla u dx$$

passando al $\liminf$ in tutti e due i membri ed utilizzando (3.3), troviamo:

$$\liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla u_{n_k}dx \ \geq \ \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla u dx \tag{3.4}$$

poiché $\{u_{n_k}\}$ è estratta dalla successione minimizzante, (3.4) ci assicura che:

$$\lambda_1(b) = \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}\nabla u_{n_k}dx \ \geq \ \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla u dx \tag{3.5}$$

Inoltre:

$$\int_\Omega b(x)u^2dx = 1$$

e ciò discende dal fatto che $H_0^1(\Omega)$, si immerge in modo compatto in $L^2(\Omega)$, infatti:

$$\int_\Omega b(x)u_{n_k}^2dx = 1$$

poiché $\{u_{n_k}\}$ è estratta da $\{u_n\}$, ancora per la medesima ragione:

$$\|u_{n_k}\|_{1,0} \ \leq \ \left(\frac{M}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

si può quindi estrarre da $\{u_{n_k}\}$ una ulteriore sottosuccessione $\{u_{n_{k_j}}\}$, tale che converga ad u in $L^2(\Omega)$; essendo $b \in L^\infty(\Omega)$, si ha:

$$1 = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega b(x)u_{n_{k_j}}^2dx = \int_\Omega b(x)u^2dx$$

perciò effettivamente $\int_\Omega b(x)u^2dx = 1$.
Allora sfruttando la definizione di $\lambda_1(b)$, la relazione (3.5) e l'identità appena dimostrata, si perviene a:

$$\lambda_1(b) \ \geq \ \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla u dx \ \geq \ \lambda_1(b)$$

quindi:

$$\lambda_1(b) = \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla u dx.$$

Da qui in poi si denoterà con φ_1 la funzione u.
Osserviamo che qualsiasi sia $t \in \mathbf{R}$:

$$\lambda_1(b) = \frac{\int_\Omega A(x)\nabla t\varphi_1\nabla t\varphi_1 dx}{\int_\Omega bt^2\varphi_1^2dx}$$

Per costruzione la funzione φ_1 soddisfa la seguente relazione:

$$\int_\Omega A(x)\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 dx - \lambda_1(b)\int_\Omega b\varphi_1^2dx \ \leq \ \int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx - \lambda_1(b)\int_\Omega bv^2dx$$

qualsiasi sia v in $H_0^1(\Omega)$, quindi φ_1 minimizza il funzionale:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx \ - \ \frac{\lambda_1(b)}{2}\int_\Omega bv^2dx \qquad v \in \ H_0^1(\Omega)$$

a partire da ciò con semplici conti, si puó mostrare che φ_1 realizza l'identità:

$$\int_\Omega A(x)\nabla\varphi_1\nabla v dx = \lambda_1(b)\int_\Omega b\varphi_1 v dx \qquad \forall v\in\ H_0^1(\Omega)$$

che equivale ad asserire che φ_1 è una soluzione in senso debole di:

$$L(\ \varphi_1) = \lambda_1(b)b(x)\ \varphi_1$$

e più in particolare:

$$\begin{cases} L(u) \ = \ \lambda_1(b)b(x)\varphi_1 & \text{in } \Omega \\ \varphi_1 \ = \ 0 & \text{su } \Gamma \ = \ \partial\Omega \\ \int_\Omega b(x){\varphi_1}^2 dx = 1 & \end{cases} \tag{3.6}$$

cioè φ_1 soddisfa il problema (3.2).
Definiamo ora in modo ricorsivo:

$$\lambda_k(b) = \inf_{\substack{v\in\ H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega bv^2dx=1 \\ \int_\Omega bv\varphi_i=0, i=1,\dots,k-1}} \left\{\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx\right\}$$

Allo stesso modo in cui si è dimostrato che $\lambda_1(b)$ è un minimo, si può far vedere che ogni $\lambda_k(b)$ lo è; e così ancora, procedendo come per $\lambda_1(b)$ si può mostrare che le funzioni φ_k in cui si realizza il minimo $\lambda_k(b)$, soddisfano in senso debole il problema (3.2).
Naturalmente $\lambda_1(b) > 0$, infatti:

$$\lambda_1(b) = \int_\Omega A(x)\nabla\ \varphi_1\nabla\ \varphi_1 dx\ \geq\ \alpha\|\ \varphi_1\|_{1,0}$$

e $\varphi_1 \neq 0$ per ipotesi. Grazie al fatto che di volta in volta la funzione φ_k che realizza il minimo $\lambda_k(b)$ viene cercata in uno spazio più piccolo di quello in cui si cerca la precedente, cioè φ_{k-1}, allora:

$$0\ <\ \lambda_1(b)\ <\ \lambda_2(b)\ < \dots$$

pertanto la successione $\{\lambda_k(b)\}$ è monotona non decrescente. Sfruttando la teoria degli operatori compatti, si può far vedere che, come asserito nell'enunciato del teorema, la successione $\{\lambda_k(b)\}$ è positivamente divergente.
Concentriamoci ora sulla coppia $(\lambda_1(b),\ \varphi_1)$ e facciamo vedere che: φ_1 ha segno costante e, come conseguenza di ciò, che $E_1(b)$ ha dimensione 1.
Consideriamo ψ che sia soluzione di $L(\psi) = \lambda_1(b)b(x)\psi$ e scegliamo ψ^+ come funzione test nella formulazione variazionale del problema in questione; allora, ricordando che $\psi = \psi^+ - \psi^-$, si avrá:

$$\int_\Omega A(x)\nabla\psi^+\nabla\psi^+ dx = \lambda_1(b)\int_\Omega b(\psi^+)^2 dx$$

e quindi:

$$\lambda_1(b) = \frac{\int_\Omega A(x)\nabla\psi^+\nabla\psi^+ dx}{\int_\Omega b(x)(\psi^+)^2 dx}$$

detta $\varphi_1 = \frac{\psi^+}{\left(\int_\Omega b(x)(\psi^+)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}$, si ha che, effettivamente

$$\lambda_1(b) = \int_\Omega A(x)\nabla\ \varphi_1\nabla\ \varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega b(x)\ \varphi_1{}^2 dx$$

e

$$\varphi_1 \geq 0\ q.o.,$$

sfruttando a questo punto il principio del massimo forte si ottiene $\varphi_1 > 0$ q.o..
Naturalmente avremmo potuto trovare $\varphi_1 < 0$ q.o. scegliendo semplicemente $\varphi_1 = -\frac{\psi^+}{\left(\int_\Omega b(x)(\psi^+)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}$.
Mostriamo ora che $E_1(b)$ ha dimensione 1: siano $\varphi_1, \bar{\varphi}$ due elementi linearmente indipendenti di $E_1(b)$, sappiamo che è possibile scegliere un segno per $\varphi_1, \bar{\varphi}$, scegliamolo quindi positivo, cioè $\varphi_1 > 0\ \ q.o., \bar{\varphi} > 0$ q.o. .
Consideriamo ora $\tilde{\phi} = \bar{\varphi} - \left(\int_\Omega b(x)\ \varphi_1\bar{\varphi}dx\right)\ \varphi_1$, si vede facilmente che $\tilde{\phi}$ è in $E_1(b)$, supponiamo pertanto $\tilde{\phi} > 0$ q.o. ; con questa scelta si ha che:

$$\int_\Omega b(x)\tilde{\phi}\ \varphi_1 dx\ >\ 0$$

e questo è possibile solo se $\tilde{\phi} = 0$ e cioè:

$$\bar{\varphi} = t\ \varphi_1$$

dove $t = \int_\Omega b(x)\ \varphi_1\bar{\varphi}dx$, con la qual cosa si può concludere che $E_1(b)$ ha dimensione 1.
Per quanto riguarda $E_k(b)$, l'unica cosa che possiamo dire è che $dim(E_k(b)) < +\infty$ (si dimostra ancora sfruttando la teoria sugli operatori compatti), l'argomento usato per dimostrare che $E_1(b)$ ha dimensione 1 non può funzionare per gli altri autospazi, poiché se $\varphi_k \in E_k(b)$, allora:

$$\int_\Omega b(x)\ \varphi_1\varphi_k dx = 0$$

ma essendo $b > 0$ q.o. e $\varphi_1 > 0$ q.o., questo significa che $\varphi_k{}^+ \neq 0$ e $\varphi_k{}^- \neq 0$.
Dobbiamo ora far vedere che $\varphi_k \in\ H_0^1(\Omega) \cap\ L^\infty(\Omega)$, qualsiasi sia $k \in \mathbf{N}$; lo dimostriamo, usando un argomento di bootstrap, per $k = 1$, essendo la dimostrazione per k qualsiasi assolutamente identica al caso $k = 1$.

Dal momento che φ_1 è soluzione del problema (3.2) quando $K = 1$, si ha che $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, pertanto $\varphi_1 \in L^{2^*}(\Omega)$, allora il secondo membro dell'equazione del problema (3.2) è in $L^{2^*}(\Omega)$, per il teorema di Stampacchia che abbiamo visto nel secondo capitolo, si ha che:

se $2^* > \frac{N}{2}$, allora $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$

se $\frac{2N}{N+2} \leq 2^* < \frac{N}{2}$, allora $\varphi_1 \in L^m(\Omega)$, con $m = \frac{2*N}{N-22*}$

ma $2^* > \frac{N}{2}$ se e solo se $N < 6$, mentre $\frac{2N}{N+2} \leq 2^*$ qualsiasi sia $N \geq 3$. Dal momento che, ad ogni passo, iterando il procedimento, si ottiene che $\lambda_1(b)b(x)\ \varphi_1 \in L^m(\Omega)$ con $m > \frac{N}{2}$ solo per certi N, mentre $\lambda_1(b)b(x)\ \varphi_1 \in L^m(\Omega)$ con $m > \frac{2N}{N+2}$ per tutti gli $N \geq 3$, definiamo ricorsivamente la successione numerica $\{s_n\}$ come segue:

$$\begin{cases} s_0 = 2^* \\ s_{n+1} = \frac{Ns_n}{N-2s_n} \end{cases} \tag{3.7}$$

La successione $\{s_n\}$ è tale che se $\lambda_1(b)b(x)\ \varphi_1 \in L^{s_n}(\Omega)$, allora $\varphi_1 \in L^{s_{n+1}}(\Omega)$. A questo punto, per dimostrare che $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$, è sufficiente far vedere che esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che:

$$s_{\bar{n}} \geq \frac{N}{2}.$$

La successione $\{s_n\}$ è monotona crescente e banalmente limitata qualora $\{s_n\} \leq \frac{N}{2}$ (la dimostrazione del fatto che la successione è monotona si ottiene mediante un semplice procedimento induttivo), quindi esiste $l \in \mathbf{R}, l > 2^*$ tale che s_n converge ad l quando n tende ad infinito, ma allora, usando la definizione di s_n, si ha:

$$l = \frac{Nl}{N - 2l}$$

e cioè $l = 0$, la qual cosa è assurda e l'assurdo deriva dall'aver supposto $\{s_n\} \leq \frac{N}{2}\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.
Allora esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che $\{s_n\} > \frac{N}{2}$ e quindi, per il Teorema di Stampacchia:

$$\varphi_1 \in L^\infty(\Omega).$$

Non avendo mai sfruttato nessuna delle caratteristiche proprie soltanto a φ_1, si vede bene che lo stesso argomento funziona anche per φ_k, $k \in \mathbf{N}$.
Se ora consideriamo $b_1, b_2 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, con $b_1 > b_2$ q.o., se $\varphi(b_1)$ è tale che:

$$\lambda_i(b_1) = \frac{\int_\Omega A(x)\nabla\ \varphi_1\nabla\ \varphi_1 dx}{\int_\Omega b_1(x)\ \varphi_1^2 dx}$$

e $\varphi_2(b_2)$ è tale che:

$$\lambda_i(b_2) = \frac{\int_\Omega A(x)\nabla\varphi_2\nabla\varphi_2 dx}{\int_\Omega b_2(x)\varphi_2^2 dx}$$

si avrà:

$$\lambda_i(b_1) \le \frac{\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla v dx}{\int_\Omega b_1(x) v^2 dx} < \frac{\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla v dx}{\int_\Omega b_2(x) v^2 dx} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

scelta $v = \varphi_2(b_2)$, si ha:

$$\lambda_i(b_1) < \frac{\int_\Omega A(x)\nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dx}{\int_\Omega b_2(x) \varphi_2^2 dx} = \lambda_i(b_2)$$

e cioè: $\lambda_i(b_1) < \lambda_i(b_2) \ \forall \ i \in \mathbf{N}$.
Infine osserviamo che per definizione si ha:

$$\int_\Omega A(x)\nabla\varphi_i(\lambda_j)\nabla\varphi_i(1)dx = \lambda_i(\lambda_j)\lambda_j(1)\int_\Omega \varphi_i(1)\varphi_i(\lambda_j)dx$$

e

$$\int_\Omega A(x)\nabla\varphi_i(1)\nabla\varphi_i(\lambda_j)dx = \lambda_i(1)\int_\Omega \varphi_i(1)\varphi_i(\lambda_j)dx.$$

Sfruttando la simmetria di $A(x)$, e sottraendo membro a membro le precedenti relazioni, si ha:

$$\lambda_i(\lambda_j)\lambda_j(1)\int_\Omega \varphi_i(1)\varphi_i(\lambda_j)dx = \lambda_i(1)\int_\Omega \varphi_i(1)\varphi_i(\lambda_j)dx$$

da cui si ottiene la tesi.

□

Osservazione. Se $b \equiv 1$, si ottengono con questo metodo, cioè ricercando il minimo dell'insieme:

$$\left\{ \frac{\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla v dx}{\int_\Omega b(x) v^2 dx} \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

le coppie (λ_k, φ_k) di autovalori ed autofunzioni dell'operatore L.
Consideriamo ora il problema:

$$\begin{cases} -L(u) \ = \ \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ \quad u \ = \ 0 & \text{su } \Gamma \ = \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

sussiste il seguente:

Teorema 3.1.2. *a) Se $\lambda = \lambda_i$ per qualche i, cioè λ è un autovalore dell'-operatore L, allora il problema* (3.8) *ha soluzione se e solo se $f \in E_i^\perp$, inoltre esiste un'unica $\bar{u} \in E_i^\perp$ tale che ogni soluzione del problema* (3.8)*, può essere scritta come $\bar{u} + \varphi$ con $\varphi \in E_i$*

b) se $\lambda \neq \lambda_i$ qualsiasi sia $i \in \mathbf{N}$, allora esiste ed è unica u soluzione del problema (3.8)

La dimostrazione del teorema 3.1.2 è conseguenza del:

Teorema 3.1.3. (Alternativa di Fredholm) *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto, allora:*

i) $\ker(I - T)$ *è di dimensione finita.*

ii) $\mathrm{Rg}(I - T)$ *è chiuso, e più precisamente:*

$$\mathrm{Rg}(I - T) = (\ker(I - T^*))^{\perp}$$

iii) $\ker(I - T) = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Rg}(I - T) = H$.

iv) $dim(\ker(I - T) = dim(\ker(I - T^*)$

Dimostrazione. Si veda [**6**].

□

Sfruttando il teorema dell'alternativa di Fredholm la dimostrazione del teorema 3.1.2 è piuttosto semplice, infatti:
Dimostrazione. Teo. 3.1.2 Consideriamo dapprima il problema:

$$\begin{cases} L(u) \;=\; f & \text{in } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

con $f \in L^2(\Omega)$, che come abbiamo visto nel secondo capitolo, ammette un'unica soluzione. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$, definiamo $T_\lambda : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$,
$T_\lambda(f) = \lambda u$, con u tale che $L(u) \;=\; f$.
L'operatore T_λ è lineare, essendo tale L, compatto, grazie alla compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, ed infine autoaggiunto a causa della simmetria della matrice A.
Il teorema 3.1.3, con $H = L^2(\Omega)$, $T = T_\lambda$ ci garantisce che se λ è un autovalore, per *iii*), si ha (essendo $\ker(I - T_\lambda) = 0$) $\mathrm{Rg}(I - T_\lambda) = L^2(\Omega)$; pertanto: scelta $f \in L^2(\Omega)$, esiste $u \in L^2(\Omega)$ con

$$u \;-\; T_\lambda(u) \;=\; f \tag{3.10}$$

Ma se $T_\lambda(u) = \lambda v$, allora v è tale che:

$$\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla\psi dx = \int_\Omega u\psi dx \quad \forall\psi \in\; H_0^1(\Omega) \tag{3.11}$$

Moltiplicando l'equazione (3.10), per $\psi \in\; H_0^1(\Omega)$ ed utilizzando (3.11), si ottiene:

$$\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla\psi dx = \int_\Omega v\psi dx \;+\; \int_\Omega f\psi dx \;\; \forall\psi \in\; H_0^1(\Omega)$$

e ciò vale a dire che esiste v tale che:

$$\begin{cases} L(u) \;=\; \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases}$$

Se esistessero w_1, w_2 soluzioni diverse, allora:

$$\begin{cases} L(w_1 - w_2) \;=\; \lambda(w_1 - w_2) & \text{in } \Omega \\ \quad w_1 - w_2 \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases}$$

ma dal momento che λ non è un autovalore, per ipotesi: $w_1 - w_2 = 0$, e quindi $w_1 = w_2$.
Supponiamo ora che $\lambda = \lambda_i$ per qualche $i \in \mathbf{N}$, sappiamo che T è autoaggiunto, quindi $T_\lambda = T_\lambda^*$. Il punto *ii*) del Teorema 3.1.3 ci garantisce che

$$\mathrm{Rg}(I - T_\lambda) = (\ker(I - T_\lambda))^\perp$$

cioè $f \in \mathrm{Rg}(I - T_\lambda)$ se e solo se $\int_\Omega f\varphi_\lambda dx = 0$, qualsiasi sia φ_λ in $\ker(I - T_\lambda)$, e cioè per ogni φ_λ autofunzione dell'autovalore λ.
Supponiamo ora, per semplicità di notazioni, che $\lambda = \lambda_1$ (in modo che E_1 abbia dimensione 1) e dimostriamo che esiste un'unica $\bar{u}$ in $E_1^\perp$ tale che u soluzione di (3.8) possa essere scritta come:

$$u = \bar{u} + t\ \varphi_1$$

al variare di t in $\mathbf{R}$.
$E_1^\perp$ è uno spazio vettoriale, che in più risulta essere di Hilbert rispetto al prodotto scalare di $H_0^1(\Omega)$, quindi $H_0^1(\Omega) = E_1^\perp \oplus E_1$ (essendo $E_1 = ((E_1^\perp)^\perp)$), dunque non ci resta che far vedere che $\bar{u}$ è unica; ma $\bar{u}$ è soluzione di

$$\begin{cases} L(\bar{u}) \;=\; \lambda_1\bar{u} + f & \text{in } \Omega \\ \quad \bar{u} \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases}$$

se esistesse un'altra soluzione del medesimo problema $\bar{w}$ si avrebbe

$$\begin{cases} L(\bar{u} - \bar{w}) \;=\; \lambda_1(\bar{u} - \bar{w}) & \text{in } \Omega \\ \quad \bar{u} - \bar{w} \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases}$$

e cioè $\bar{u} - \bar{w}$ è in E_1, quindi esiste $s \in \mathbf{R}$ tale che:

$$\bar{u} - \bar{w} = s\ \varphi_1$$

pertanto $\bar{w} = \bar{u} - s\ \varphi_1$ ed essendo $E_1 \cap E_1^\perp = \{0\}$, questo ci dice che $s = 0$, da cui $\bar{w} = \bar{u}$.

$\square$

Osservazione. Quest'ultima parte della dimostrazione, potrebbe essere vista anche come conseguenza del fatto che il funzionale:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla v dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega v^2 dx - \int_\Omega f v dx$$

associato al problema (3.8), pur non essendo coercitivo su tutto $H_0^1(\Omega)$, si può dimostrare, con semplici conti a partire dalla definizione di λ_k, essere tale su $E_k^\perp$.

Osservazione. Il Teorema 3.1.2 può essere generalizzato, considerando f in $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, a patto di non interpretare più $\int_\Omega f\varphi_\lambda dx = 0$ come una relazione di ortogonalità, e di sfruttare in particolar modo l'osservazione precedente piuttosto che il Teorema 3.1.3, per ottenere soluzioni minimizzando, con il Teorema di Weierstrass, solo laddove sia possibile.

3.2 Il Teorema di Dolph

Consideriamo ora il problema :

$$\begin{cases} L(u) \; = \; g(u) + f & \text{in } \Omega \\ \quad u \; = \; 0 & \text{su } \Gamma \; = \; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

supponendo però, in questo caso, che $\frac{g(s)}{s}$, al variare di s in $\mathbf{R}$, sia compresa tra autovalori successivi.

Esempio Se si considera $\mu \in (\lambda_1, \lambda_2)$, si ha che, naturalmente, $g(s) = \mu s$ soddisfa quanto richiesto.

Teorema 3.2.1. (di Dolph) *Sia* $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *e si consideri il problema* (3.12)*, con* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$*, funzione continua tale che esiste* $\delta > 0$ *per il quale:*

a) $\lambda_k + \delta \leq \frac{g(s)}{s} \leq \lambda_{k+1} - \delta \quad \forall\ s \in \mathbf{R}$*;*

b) $\lambda_k + \delta \leq \frac{g(s)-g(t)}{s-t} \leq \lambda_{k+1} - \delta \quad \forall\ s, t \in \mathbf{R} \quad s \neq t$*;*

c) ed esistano inoltre $\lambda_-, \lambda_+ > 0$ *tali che:*

$$\lambda_- = \lim_{t \to -\infty} \frac{g(t)}{t}, \quad \lambda_+ = \lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{t}.$$

Allora esiste ed è unica u *soluzione del problema* (3.12)*.*

Dimostrazione. Supponiamo che $dim\ E_k = n_k$, e sia $\{\varphi_k^{(1)}, ..., \varphi_k^{(n_k)}\}$ una base di E_k; supponiamo inoltre di avere u soluzione di (3.12) e scriviamola come:

$$u = \bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}, \text{con } s_j = \int_\Omega u\varphi_k^{(j)} dx \text{ e } \int_\Omega \bar{u}\varphi_k^{(j)} dx = 0$$

qualsiasi sia $j \in \{1, ..., n_k\}$.

Allora sfruttando la linearità del problema (3.1) si ha:

$$L\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j L\varphi_k^{(j)}\right) = g\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right) + f,$$

e, per definizione di $\varphi_k^{(j)}$, si ha:

$$L\bar{u} + \lambda_k \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)} = g\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right) + f. \tag{3.13}$$

Scegliendo come funzioni test ognuna delle $\varphi_k^{(j)}$ nella formulazione variazionale di (3.13), si ottiene un sistema di n_k equazioni nelle n_k incognite $s_j\ j = \{1, .., n_k\}$:

$$\begin{cases} s_1\lambda_k = \int_\Omega g\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)\varphi_k^{(1)}dx + \int_\Omega f\varphi_k^{(1)}dx \\ . \\ . \\ . \\ s_{n_k}\lambda_k = \int_\Omega g\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)\varphi_k^{(n_k)}dx + \int_\Omega f\varphi_k^{(n_k)}dx \end{cases} \tag{3.14}$$

Scegliendo invece come funzione test nella formulazione variazionale di (3.13) una qualsiasi funzione w in $E_k^\perp$, si ottiene:

$$\int_\Omega A(x)\nabla\bar{u}\nabla w dx = \int_\Omega g\left(\bar{u} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right) w dx + \int_\Omega f w dx\ \ \forall\ w \in E_k^\perp. \tag{3.15}$$

Dunque risolvere il problema (3.12) equivale a risolvere i problemi (3.14) e (3.15).

Suddividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo 1. Mostriamo che, fissato $s \in \mathbf{R}$, il problema (3.15) ammette sempre una soluzione $\bar{u}_s$ in $E_k^\perp$, e che tale $\bar{u}_s$ è anche unica; a questo scopo, essendo $E_k^\perp$ uno spazio di Hilbert, possiamo sfruttare il Teorema di Weierstrass. Consideriamo il funzionale associato al problema (3.15) e cioè:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx - \int_\Omega G\left(v + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right) dx - \int_\Omega f v dx\ \ v \in E_k^\perp$$

dove $G(t) = \int_0^t g(s)ds$.

J è debolmente semicontinuo inferiormente, infatti: J è costituito da tre addendi dei quali il primo è *d.s.c.i.* essendo $E_k^\perp$ chiuso rispetto alla convergenza debole, il terzo addendo è invece continuo rispetto alla convergenza debole, per quanto riguarda il secondo addendo si ottiene, sfruttando il Lemma 1.1.8 con $\vartheta = 1$ e il fatto che $|g(s)| \leq k|s|$ e la compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, quanto richiesto.

J è anche coercitivo; usando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene:

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx - \int_\Omega G\left(v + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right) dx - \|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{2^*}.$$

Usando poi la disuguaglianza di Sobolev ed il fatto che esiste $\mu < \lambda_{k+1}$ con $\left| G\left(u + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)\right| \le \frac{\mu}{2}|u + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}|^2$, si ha:

$$J(v) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx - \frac{\mu}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)^2 - \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{1,0}.$$

Sapendo poi che v è in $E_k^\perp$ ed usando la definizione di λ_{k+1}, si ha:

$$J(v) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx - \frac{\mu}{2\lambda_{k+1}}\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx -$$

$$-\frac{\mu}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)^2 - \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{1,0}$$

pertanto

$$J(v) \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\right)\int_\Omega A(x)\nabla v\nabla v dx - \frac{\mu}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)^2 - \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{1,0}.$$

Essendo $\mu < \lambda_{k+1}$, allora $\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\right) > 0$, usando dunque l'uniforme ellitticità di A, si ottiene:

$$J(v) \ge \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\right)\|v\|_{1,0}^2 - \frac{\mu}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right)^2 - \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{1,0}.$$

Essendo, come già detto, $\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\right) > 0$ ed $\alpha > 0$, possiamo asserire che:

$$J(v) \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando } \|v\|_{1,0} \longrightarrow +\infty,$$

e cioè J è coercitivo su $E_k^\perp$. Così facendo, si è ottenuto che J ammette minimo su $E_k^\perp$; quindi fissato $s = (s_1, ..., s_{n_k}) \in \mathbf{R}^{n_k}$, esiste $v_s \in E_k^\perp$ tale che:

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_s\nabla w dx = \int_\Omega g\left(v_s + \sum_{j=1}^{n_k} s_j\ \varphi_k^{(j)}\right) w dx + \int_\Omega f w dx$$

qualsiasi sia w in $E_k^\perp$. Mostriamo ora che v_s è unica; supponiamo che esistano v_s, w_s in $E_k^\perp$ soluzioni del problema (3.15), con la stessa s. Sottraendo membro a membro i problemi risolti rispettivamente da v_s e da w_s, e scegliendo come funzione test nei due problemi $w = v_s - w_s$, si ha:

$$\int_\Omega A(x)\nabla(v_s - w_s)\nabla(v_s - w_s)dx =$$

$$= \int_\Omega \left[g\left(v_s + \sum_{j=1}^{n_k} s_j \ \varphi_k^{(j)} \right) - g\left(w_s + \sum_{j=1}^{n_k} s_j \ \varphi_k^{(j)} \right) \right] [v_s - w_s] \, dx$$

sfruttando l'ipotesi b), si ottiene:

$$\int_\Omega A(x)\nabla(v_s - w_s)\nabla(v_s - w_s)dx \leq (\lambda_{k+1} - \delta) \int_\Omega |v_s - w_s|^2 dx$$

Ma per come sono state scelte v_s, w_s, si ha:

$$\lambda_{k+1} \|v_s - w_s\|_2^{\ 2} \leq (\lambda_{k+1} - \delta) \, \|v_s - w_s\|_2^{\ 2}$$

e questo è possibile solo se $\|v_s - w_s\|_2 = 0$ e quindi solo se $v_s = w_s$ q.o. **Passo 2.** Dovremmo risolvere il problema n_k-dimensionale (3.14), ma supponiamo per semplicità che sia $k = 1$, in modo da ottenere un problema unidimensionale. Con questa scelta infatti, il problema da risolvere diventa:

$$\lambda_1 s = \int_\Omega g(\bar{u}_s + s \ \varphi_1) \ \varphi_1 dx + \int_\Omega f \ \varphi_1 dx.$$

Mostriamo pertanto che qualsiasi sia il valore di $\int_\Omega f \ \varphi_1 dx$, esiste s_0 tale che:

$$\lambda_1 s_0 - \int_\Omega g(\bar{u}_{s_0} + s_0 \ \varphi_1) \ \varphi_1 dx = \int_\Omega f \ \varphi_1 dx.$$

Definiamo a tal fine

$$F(s) = \lambda_1 s - \int_\Omega g(\bar{u}_s + s \ \varphi_1) \ \varphi_1 dx \quad s \in \mathbf{R}$$

e facciamo vedere che F è suriettiva su $\mathbf{R}$, sfruttando il teorema di esistenza degli zeri, e cioè facendo vedere che:

i) F è continua;

ii) si ha

$$\lim_{s \to +\infty} F(s) = -\infty, \quad \lim_{s \to -\infty} F(s) = +\infty$$

Consideriamo $\{s_n\} \subset \mathbf{R}$ che converge ad $s_0 \in \mathbf{R}$, allora v_{s_n} del passo precedente è tale che:

$$L(v_{s_n}) \ = \ g(v_{s_n} + s_n \ \varphi_1) + f \quad \text{in} E_1^\perp \tag{3.16}$$

e mostriamo come prima cosa che v_{s_n} è limitata in $H_0^1(\Omega)$;

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{s_n} \nabla v_{s_n} dx = \int_\Omega g(v_{s_n} + s_n \ \varphi_1) v_{s_n} dx + \int_\Omega f v_{s_n} dx$$

avendo scelto v_{s_n} come funzione test nella formulazione variazionale del problema (3.16). Usando ora l'uniforme ellitticità di A, la proprietà $a)$ della funzione g ed il fatto che $v_{s_n} \in E_1^{\perp}$, si ottiene:

$$\alpha\left(\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\|v_{s_n}\|_{1,0}^{\ 2} \leq \int_\Omega v_{s_n} f dx + \int_\Omega |v_{s_n}|\ \varphi_1\left(\lambda_2-\delta\right)|s_n| dx$$

che sfruttando la disuguaglianza di Hölder in tutti e due gli addendi a secondo membro, ci assicura:

$$\alpha\left(\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\|v_{s_n}\|_{1,0}^{\ 2} \leq \left(\lambda_2-\delta\right)|s_n|\|v_{s_n}\|_2 + \|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v_{s_n}\|_{2^*}.$$

Grazie ora alla disuguaglianza di Sobolev, usata sul secondo membro della precedente relazione si ottiene:

$$\alpha\left(\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\|v_{s_n}\|_{1,0}^{\ 2} \leq \left(\lambda_2-\delta\right)|s_n|\|v_{s_n}\|_2 + \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v_{s_n}\|_{1,0}.$$

Sfruttando ancora il fatto che v_{s_n} è in $E_1^{\perp}$, si ha:

$$\alpha\left(\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\|v_{s_n}\|_{1,0}^{\ 2} \leq \left(\frac{\lambda_2-\delta}{\lambda_2}\right)|s_n|\|v_{s_n}\|_{1,0} + \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v_{s_n}\|_{1,0},$$

e quindi, dividendo ambo i membri per $\alpha\left(\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\|v_{s_n}\|_{1,0}$, si ottiene:

$$\|v_{s_n}\|_{1,0} \leq \left(\frac{\lambda_2-\delta}{\alpha\delta}\right)|s_n| + \left(\frac{\lambda_2}{\delta\alpha S}\right)\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}. \tag{3.17}$$

Dal momento poi che s_n è convergente, esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $|s_n| < c$, dunque la precedente relazione diventa:

$$\|v_{s_n}\|_{1,0} \leq \left(\frac{\lambda_2-\delta}{\alpha\delta}\right)c + \left(\frac{\lambda_2}{\delta\alpha S}\right)\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}$$

e così $\|v_{s_n}\|_{1,0}$ non esplode, ma soprattutto, esistono $v_{s_{n_k}}$ e $w \in E_1^{\perp}$, tali che $v_{s_{n_k}}$ converge debolmente a w in $H_0^1(\Omega)$. Vogliamo far vedere che $w = v_{s_0}$ e che la convergenza di $v_{s_{n_k}}$ in realtà è forte in $H_0^1(\Omega)$.
Per la compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, si ha che da ogni sottosuccessione di $v_{s_{n_k}}$, si può estrarre una sotto-sottosuccessione di v_{s_n} che converge a w in $L^2(\Omega)$, pertanto v_{s_n} converge a w in $L^2(\Omega)$, inoltre grazie alle proprietà di g e al Lemma 1.1.8, si ha che $g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)$ converge a $g(w + s_0\ \varphi_1)$ in $L^2(\Omega)$, sfruttando poi il fatto che v_{s_n} risolve il problema (3.16) e l'uniforme ellitticità di A, si ottiene:

$$\alpha\|v_{s_n} - w\|_{1,0} \leq \int_\Omega g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)(v_{s_n} - w)dx - \int_\Omega f(v_{s_n} - w)dx -$$

$$-\int_{\Omega} A(x)\nabla w \nabla (v_{s_n} - w)dx$$

(abbiamo usato come funzione test nel problema (3.16), la funzione $v_{s_n} - w$); così passando al limite in tutti e due i membri, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_{s_n} - w\|_{1,0} = 0$$

e cioè v_{s_n} converge a w in $H_0^1(\Omega)$.
Per ottenere la continuità della funzione F, ci occorre soltanto che $w = v_{s_0}$; consideriamo la formulazione variazionale del problema (3.16):

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla v_{s_n} \nabla z dx = \int_{\Omega} g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1) z dx + \int_{\Omega} f z dx$$

al variare di z in $E_1^{\perp}$. Passando al limite in tutti e due i membri della precedente relazione, si ha:

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla w \nabla z dx = \int_{\Omega} g(w + s_0\ \varphi_1) z dx + \int_{\Omega} f z dx \ \ \forall z \in\ E_1^{\perp}$$

dunque w soddisfa in $E_1^{\perp}$ il problema $L(w) = g(w + s_0\ \varphi_1) + f$. Tuttavia nel passo precedente, si è mostrata l'unicità, fissato $s \in \mathbf{R}$, della soluzione del problema in questione, pertanto $w = v_{s_0}$.
Dobbiamo ora far vedere che F soddisfa *ii*); la relazione (3.17) ci assicura che qualora $\|v_s\|_{1,0}$ esplodesse, lo farebbe linearmente, cioè esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che $\|v_s\|_{1,0} \le c_1|s| + c_2$.
Sia s_n una successione numerica positivamente divergente:

$$\frac{F(s_n)}{s_n} = \lambda_1 - \int_{\Omega} \frac{g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)}{s_n}\ \varphi_1 dx =$$

$$= \lambda_1 - \int_{\Omega} \frac{g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)}{v_{s_n} + s_n\ \varphi_1} \frac{v_{s_n} + s_n\ \varphi_1}{s_n}\ \varphi_1 dx =$$

$$= \lambda_1 - \int_{\Omega} \frac{g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)}{v_{s_n} + s_n\ \varphi_1} \left[\frac{v_{s_n}}{s_n} +\ \varphi_1\right]\ \varphi_1 dx$$

Ricordiamo che a meno di sottosuccessioni, grazie alla stima (3.17), $\frac{v_{s_n}}{s_n}$ converge a w in $L^2(\Omega)$; definiamo inoltre:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : w(x) +\ \varphi_1(x) > 0\},\ \Omega^- = \{x \in \Omega : w(x) +\ \varphi_1(x) < 0\},$$
$$\Omega^0 = \{x \in \Omega : w(x) +\ \varphi_1(x) = 0\}.$$

Se $x \in \Omega^+$ allora $v_{s_n} + s_n\ \varphi_1 = \left[\frac{v_{s_n}}{s_n} +\ \varphi_1\right]$ diverge positivamente, ed analogamente, se $x \in \Omega^-$ allora $v_{s_n} + s_n\ \varphi_1 = \left[\frac{v_{s_n}}{s_n} +\ \varphi_1\right]$ diverge negativamente. Sfruttando la definizione di $\Omega^+, \Omega^-, \Omega^0$, si ha:

$$\frac{F(s_n)}{s_n} = \lambda_1 - \int_{\Omega^+} \frac{g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)}{v_{s_n} + s_n\ \varphi_1} \left[\frac{v_{s_n}}{s_n} +\ \varphi_1\right]\ \varphi_1 dx - \int_{\Omega^-} \frac{g(v_{s_n} + s_n\ \varphi_1)}{v_{s_n} + s_n\ \varphi_1} \left[\frac{v_{s_n}}{s_n} +\ \varphi_1\right]\ \varphi_1 dx -$$

$$- \int_{\Omega^0} \frac{g(v_{s_n} + s_n \varphi_1)}{v_{s_n} + s_n \varphi_1} \left[\frac{v_{s_n}}{s_n} + \varphi_1 \right] \varphi_1 dx$$

Passando ora al limite per n che tende ad infinito ed usando l'ipotesi c), si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F(s_n)}{s_n} \leq \lambda_1 - \lambda_+ \int_{\Omega^+} (w + \varphi_1) \varphi_1 dx - \lambda_+ \int_{\Omega^-} (w + \varphi_1) \varphi_1 dx,$$

ma dal momento che $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^0$ e che su Ω^0, si ha $w + \varphi_1 = 0$, possiamo asserire che:

$$\frac{F(s_n)}{s_n} \leq \lambda_1 - \lambda_+ \int_{\Omega} (w + \varphi_1) \varphi_1 dx.$$

Per ipotesi inoltre $w \in E_1^{\perp}$ e $\int_\Omega \varphi_1^2 dx = 1$, quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F(s_n)}{s_n} \leq \lambda_1 - \lambda_+ < 0,$$

e pertanto $F(s_n) < c_3 s_n$ con $c_3 < 0$, allora:

$$\lim n \to +\infty F(s_n) = -\infty$$

Un analogo ragionamento si può fare quando s_n diverga negativamente, ottenendo però in quel caso che $F(s_n)$ diverge positivamente; quindi F è suriettiva e così si conclude la dimostrazione dell'esistenza.
Per l'unicità, dobbiamo far vedere che s_0 è unico, e lo faremo, mostrando che F è strettamente decrescente, quindi anche iniettiva. Sfruttando l'ipotesi b) si ha:

$$\frac{F(s) - F(t)}{s - t} = \lambda_1 - \frac{1}{s - t} \int_\Omega [g(v_s + s \varphi_1) - g(v_t + t \varphi_1)] \varphi_1 dx <$$

$$< \lambda_1 - \frac{(\lambda_1 + \delta)}{s - t} \int_\Omega [(v_s + s \varphi_1) - (v_t + t \varphi_1)] \varphi_1 dx$$

dal momento che $v_s, v_t \in E_1^{\perp}$ e che $\int_\Omega \varphi_1^2 dx = 1$ con semplicissimi calcoli, si vede che:

$$\frac{F(s) - F(t)}{s - t} < -\delta \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Dunque F è strettamente decrescente.
Se $k \neq 1$, si deve ripetere tutto il secondo passo, per ogni $j \in \{1, ..., n_k\}$, studiando ogni volta il comportamento di:

$$F_j(s) = s_j \lambda_k - \int_\Omega g \left(v_{s_j} + \sum_{j=1}^{n_k} s_j \varphi_k^{(j)} \right) \varphi_k^{(j)} dx \quad j \in \{1, ..., n_k\}$$

ottenendo, di volta in volta per F_j gli stessi risultati ottenuti per F.

□

3.3 Il caso di risonanza: il problema di Landesmann-Lazer

Il problema di Landesmann-Lazer, consiste nello studio di

$$\begin{cases} L(u) \ = \ g(u) + f & \text{in } \Omega \\ \quad u \ = \ 0 & \text{su } \Gamma \ = \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

dove:

$LL)$ $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, g(s) = \lambda_1 s + h(s)$ ed esistono $h_-, h_+ \in \mathbf{R}$ tali che:

$$h_- < h(s) < h_+$$

qualsiasi sia $s \in \mathbf{R}$ ed $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

In buona sostanza, ciò che stiamo asserendo è che $h(s)$ sia "una perturbazione limitata" del primo autovalore.
Esempio La funzione $g(s) = \lambda_1 s + \sin(s)$, soddisfa a tutti gli effetti le ipotesi $LL)$.
Ciò che è cambiato rispetto al Teorema di Dolph, è il fatto che, nel problema di Landesmann-Lazer:

$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda_1$$

mentre le ipotesi $a)$ e $c)$ del Teorema di Dolph, garantivano che, anche all'infinito, sussistesse:

$$\lambda_1 + \delta \leq \frac{g(s)}{s}$$

Un tale indebolimento delle ipotesi sulla funzione $g(s)$, ci obbliga ad imporre condizioni restrittive sulla f affinché sia possibile l'esistenza di una soluzione del problema, come del resto è naturale aspettarsi, considerando come funzione h, $h(s) \equiv 0$ e ricordando i risultati sul problema agli autovalori, ottenuti nel paragrafo 3.1.
Sussiste, insomma, la seguente:

Proposizione 3.3.1. *Se sotto le condizioni LL) esiste u soluzione del problema* (3.18)*, allora:*

$$-h_+ \int_\Omega \varphi_1 dx \leq \int_\Omega f \ \varphi_1 dx \leq -h_- \int_\Omega \varphi_1 dx$$

Dimostrazione. Consideriamo φ_1 come funzione test nella formulazione variazionale del problema (3.18):

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla \ \varphi_1 dx = \int_\Omega \lambda_1 u \ \varphi_1 dx \int_\Omega h(u) \ \varphi_1 dx + \int_\Omega f \ \varphi_1 dx$$

essendo ($\lambda_1,\ \varphi_1$), autovalore ed autofunzione per l'operatore L, si ha:

$$\int_\Omega A(x)\nabla u\nabla\ \varphi_1 dx = \int_\Omega A(x)\nabla u\nabla\ \varphi_1 dx \int_\Omega h(u)\ \varphi_1 dx + \int_\Omega f\ \varphi_1 dx$$

quindi:

$$\int_\Omega h(u)\ \varphi_1 dx + \int_\Omega f\ \varphi_1 dx = 0$$

cioè:

$$\int_\Omega f\ \varphi_1 dx = -\int_\Omega h(u)\ \varphi_1 dx \tag{3.19}$$

dunque considerando le ipotesi fatte sulla funzione h, si hanno le seguenti relazioni:

$$-h_+ \int_\Omega\ \varphi_1 dx \leq -\int_\Omega h(u)\ \varphi_1 dx, -h_- \int_\Omega\ \varphi_1 dx \geq -\int_\Omega h(u)\ \varphi_1 dx$$

che insieme con la relazione (3.19), ci garantiscono che:

$$-h_+ \int_\Omega\ \varphi_1 dx \leq \int_\Omega f\ \varphi_1 dx \leq -h_- \int_\Omega\ \varphi_1 dx$$

□

Osservazione. Se $h \equiv 0$, la precedente Proposizione, ci sta dicendo che è condizione necessaria, perché esista una soluzione del problema (3.18) che:

$$\int_\Omega f\ \varphi_1 dx = 0$$

e questa è proprio la condizione espressa dal Teorema 3.1.2, a patto di tenere presente, essendo $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, l'Osservazione che segue il Teorema stesso. La condizione sufficiente affinchè esista una soluzione del problema (3.18), non si discosta di molto da quella necessaria, in particolare, sussiste:

Teorema 3.3.2. (di Landesmann-Lazer) *Consideriamo il problema* (3.18), *con f, g che soddisfano le ipotesi LL), cioè:*

a) $g(s) = \lambda_1 s + h(s)\ ,\ s \in \mathbf{R}$

b) esistono $h_+, h_- \in \mathbf{R}$, tali che:

$$\lim_{s\to\pm\infty} h(s) = h_\pm$$

supponiamo inoltre che:

c) $-h_+ \int_\Omega\ \varphi_1 dx < \int_\Omega f\ \varphi_1 dx < -h_- \int_\Omega\ \varphi_1 dx$

d) esiste $\delta \in \mathbf{R}^+$, tale che:

$$\frac{h(s)-h(t)}{s-t} \leq (\lambda_2 - \lambda_1) - \delta \quad \forall\ s,t \in \mathbf{R} \quad s \neq t$$

Allora esiste u soluzione del problema (3.18).

Dimostrazione. Supponiamo di avere u, soluzione di (3.18), e scriviamola come $u = \bar{u} + s\ \varphi_1$, con $s = \int_\Omega u\ \varphi_1 dx$ e $\int_\Omega \bar{u}\ \varphi_1 dx = 0$ (ciò è sempre possibile dal momento che $H_0^1(\Omega) = E_1 \oplus E_1^\perp$) allora, sfruttando la linearità del'operatore L, si ottiene:

$$L(\bar{u}) + sL(\ \varphi_1) = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_1 s\ \varphi_1 + h(\bar{u} + s\ \varphi_1) + f$$

ricordando che $(\lambda_1,\ \varphi_1)$ sono autovalore ed autofunzione di L, si ha:

$$L(\bar{u}) = \lambda_1 \bar{u} + h(\bar{u} + s\ \varphi_1) + f$$

scegliendo come funzione test, nella formulazione variazionale di tale problema, dapprima $w \in E_1^\perp$, poi φ_1, si ottengono le due relazioni:

$$\int_\Omega A(x)\nabla\bar{u}\nabla w dx = \lambda_1 \int_\Omega \bar{u} w dx + \int_\Omega h(\bar{u} + s\ \varphi_1) w dx + \int_\Omega f w dx \tag{3.20}$$

e

$$\int_\Omega h(\bar{u} + s\ \varphi_1)\ \varphi_1 dx + \int_\Omega f\ \varphi_1 dx \tag{3.21}$$

qualsiasi sia s fissato in $\mathbf{R}$.
Dunque, risolvere il problema (3.18), equivale a:

i) risolvere il problema (3.20) in $E_1^\perp$;

ii) dimostrare che

$$F(s) = \int_\Omega h(\bar{u} + s\ \varphi_1)\ \varphi_1 dx, \quad s \in \mathbf{R}$$

è suriettiva.

Per risolvere i), con s fissato, consideriamo il funzionale associato al problema (3.20):

$$J_s(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla v dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v^2 dx - \int_\Omega H(v + s\ \varphi_1) dx - \int_\Omega f v dx$$

dove $H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$, $v \in E_1^\perp$ e mostriamo che J_s ammette minimo in $E_1^\perp$, sfruttando il Teorema di Weierstass. Per definizione, si ha che: $|H(t)| \leq h_+ |t|$, pertanto, se $\bar{u} \in E_1^\perp$, allora

$$\frac{\lambda_1}{2}|\bar{u}|^2 + H(\bar{u} + s\ \varphi_1) \leq \frac{\lambda_1}{2}|\bar{u}|^2 + (h_+)|\bar{u} + s\ \varphi_1| \leq \frac{\lambda_1}{2}|\bar{u}|^2 + (h_+)|\bar{u}| + (h_+)|s\ \varphi_1| \leq$$

$$\leq \left(\frac{\lambda_2-\delta}{2}\right)|\bar{u}|^2+(h_+)|\bar{u}|+(h_+)|s\ \varphi_1|.$$

Quindi il funzionale J_s è tale che:

$$J_s(\bar{u})\geq \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla\bar{u}\nabla\bar{u}dx-\left(\frac{\lambda_2-\delta}{2}\right)\int_\Omega|\bar{u}|^2dx-$$

$$-(h_+)\int_\Omega|\bar{u}|dx-\int_\Omega f\bar{u}dx-(h_+)s|\Omega|\|\ \varphi_1\|_\infty.$$

Sfruttando la disuguaglianza di Hölder, sul terzo e sul quarto addendo del secondo membro, si ha:

$$J_s(\bar{u})\geq \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla\bar{u}\nabla\bar{u}dx-\left(\frac{\lambda_2-\delta}{2}\right)\int_\Omega|\bar{u}|^2dx-(h_+)\|\bar{u}\|_{2^*}-$$

$$-\|\bar{u}\|_{2^*}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}-(h_+)s|\Omega|\|\ \varphi_1\|_\infty.$$

Per definizione di λ_2, sfruttando il fatto che $\bar{u}\in\ E_1^\perp$, si ha:

$$J_s(\bar{u})\geq \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla\bar{u}\nabla\bar{u}dx-\left(\frac{\lambda_2-\delta}{2\lambda_2}\right)\int_\Omega A(x)\nabla\bar{u}\nabla\bar{u}dx-$$

$$-(h_+)\|\bar{u}\|_{2^*}-\|\bar{u}\|_{2^*}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}-(h_+)s|\Omega|\|\ \varphi_1\|_\infty.$$

L'uniforme ellitticità di A, ci garantisce inoltre che:

$$J_s(\bar{u})\geq\left(\frac{\alpha\delta}{2\lambda_2}\right)\int_\Omega|\nabla\bar{u}|^2dx-(h_+)\|\bar{u}\|_{2^*}-\|\bar{u}\|_{2^*}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}-(h_+)s|\Omega|\|\ \varphi_1\|_\infty.$$

Grazie alla disuguaglianza di Sobolev, usata sul secondo e sull'ultimo addendo del secondo membro della relazione precedente, si ottiene:

$$J_s(\bar{u})\geq\left(\frac{\alpha\delta}{2\lambda_2}\right)\|\bar{u}\|_{1,0}^2-\left(\frac{h_+}{S}\right)\|\bar{u}\|_{1,0}-\frac{1}{S}\|\bar{u}\|_{1,0}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}-(h_+)s|\Omega|\|\ \varphi_1\|_\infty$$

dal momento che $\frac{\alpha\delta}{2\lambda_2}>0$, possiamo asserire che J_s è coercitivo su $E_1^\perp$.
Per quanto riguarda la debole semi-continuità inferiore di J_s, osserviamo che J_s è costituito da quattro termini, di cui: il primo ed il secondo sono evidentemente *d.s.c.i*, il quarto è addirittura debolmente continuo, e così anche il terzo, infatti, avendo H crescita sub-lineare grazie al Lemma 1.1.8 H manda $L^2(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ in modo continuo.
Dunque, fissata $s\in\mathbf{R}$, esiste $\bar{u}_s$ in cui J_s realizza il suo minimo; con dei semplici conti, si può far vedere che $\bar{u}_s$ soddisfa il problema (3.20).
Concentriamoci ora sul punto ii); la dimostrazione della suriettività di F, si farà grosso modo come nel Teorema di Dolph. Forniamo in primo luogo una stima sulla norma di v_s, soluzione del problema (3.20); scegliendo proprio

v_s come funzione test nella formulazione variazionale del problema stesso, ed usando il fatto che $v_s \in E_1^\perp$, si ottiene:

$$\lambda_2 \|v_s\|_2^2 \leq \lambda_1 \|v_s\|_2^2 + \int_\Omega h(v_s + s\ \varphi_1) v_s dx + \int_\Omega f v_s dx$$

sfruttando poi la limitatezza di h ed, ancora una volta , il fatto che $v_s \in E_1^\perp$ si perviene a

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\|v_s\|_2^2 \leq (h_+) \int_\Omega v_s dx - \int_\Omega f v_s dx.$$

La disuguaglianza di Hölder usata su entrambi gli addendi a secondo membro, ci fornisce:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\|v_s\|_2^2 \leq (h_+)|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v_s\|_2 + \|f\|_2 \|v_s\|_2.$$

Dal momento che $(\lambda_2 - \lambda_1) > 0$, e che se $\|v_s\|_2 = 0$ avremmo finito, allora dividendo ambo i membri della precedente relazione per $(\lambda_2 - \lambda_1)\|v_s\|_2$, si perviene alla seguente stima:

$$\|v_s\|_2 \leq \frac{(h_+)|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \|f\|_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} = c_3(\Omega, h, f). \tag{3.22}$$

Sfruttiamo ora la suddetta stima per mostrare che v_s è limitata anche in $H_0^1(\Omega)$

$$\|v_s\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \int_\Omega A(x) \nabla v_s \nabla v_s dx = \frac{\lambda_1}{\alpha} \|v_s\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega h(v_s + s\ \varphi_1) v_s dx + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega f v_s dx$$

la disuguaglianza di Hölder, usata sugli ultimi due addendi della precedente relazione, ci fornisce:

$$\|v_s\|_{1,0}^2 \leq \frac{\lambda_1}{\alpha} \|v_s\|_2^2 + \frac{\|v_s\|_2}{\alpha} \left(\int_\Omega (h(v_s + s\ \varphi_1))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha} \|f\|_2 \|v_s\|_2$$

che essendo h limitata, ci assicura che

$$\|v_s\|_{1,0}^2 \leq \frac{\lambda_1}{\alpha} \|v_s\|_2^2 + \frac{(h_+)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\alpha} \|v_s\|_2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|_2 \|v_s\|_2.$$

Sfruttando ora la stima (3.22) ed indicando semplicemente con c_3 la costante che da essa si ottiene, cioè $c_3 = c_3(\Omega, h, f)$, giungiamo a:

$$\|v_s\|_{1,0}^2 \leq \frac{\lambda_1}{\alpha} c_3^2 + \left(\frac{(h_+)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\alpha} + \|f\|_2 \right) c_3$$

esiste pertanto c_4, $c_4 = \left(\frac{\lambda_1}{\alpha}c_3^2 + \left(\frac{(h_+)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\alpha} + \|f\|_2\right)c_3\right)^{\frac{1}{2}}$, tale che

$$\|v_s\|_{1,0} \leq c_4.$$

Sia s_n una successione numerica convergente e sia s_0 il suo limite, allora la successione delle soluzioni v_{s_n} è, per quanto dimostrato poc'anzi, limitata in $H_0^1(\Omega)$ esistono quindi una sottosuccessione di v_{s_n}, $v_{s_{n_k}}$ ed una funzione $w \in E_1^\perp$, tali che: $v_{s_{n_k}}$ converge debolmente a w in $E_1^\perp$, consideriamo allora:

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{s_{n_k}}\nabla z dx = \lambda_1 \int_\Omega v_{s_{n_k}} z dx + \int_\Omega h(v_{s_{n_k}} + s_{n_k}\,\varphi_1) z dx + \int_\Omega f z dx \quad \forall z \in E_1^\perp. \tag{3.23}$$

Dal momento che h è limitata, sfruttando il Lemma 1.1.8, si ha che $h(v_{s_{n_k}} + s_{n_k}\,\varphi_1)$ converge a $h(w + s_0\,\varphi_1)$ in $L^2(\Omega)$, se pertanto passiamo al limite nell'equazione (3.23), otteniamo:

$$\int_\Omega A(x)\nabla w \nabla z dx = \lambda_1 \int_\Omega w z dx + \int_\Omega h(w + s_0\,\varphi_1) z dx + \int_\Omega f z dx \quad \forall z \in E_1^\perp.$$

Dunque w è soluzione in $E_1^\perp$ di:

$$L(w) = \lambda_1 w + h(w + s_0\,\varphi_1) + f.$$

A questo punto, ci servirebbe che $w = v_{s_0}$, ma ciò ci è garantito dalla ipotesi d), e si dimostra come nel Teorema di Dolph.
Possiamo inoltre asserire che l'applicazione da $\mathbf{R}$ in $E_1^\perp$ che ad s associa v_s è debolmente continua, e ciò basta considerata la limitatezza di h a garantire la continuità della funzione F.
Sia ora s_n una successione numerica positivamente divergente, dal momento che $\|v_{s_n}\|_{1,0} \leq c_4$, esistono $v_{s_{n_k}}$ sottosuccessione di v_{s_n} e $w \in E_1^\perp$, tali che $v_{s_{n_k}}$ converge debolmente a w in $E_1^\perp$, inoltre, essendo $\varphi_1 > 0$ q.o., $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$, e come è ovvio w finita q.o., allora:

$$v_{s_{n_k}} + s_{n_k}\,\varphi_1 \longrightarrow +\infty \quad \text{q.o..}$$

Lo stesso accade se si considera t_n successione numerica che diverga a $-\infty$.
Con queste informazioni, usando il Teorema di Lebesgue, si ottengono:

$$\lim_{k\to+\infty} F(s_{n_k}) = (h_+)\int_\Omega \varphi_1 dx > 0$$

e

$$\lim_{i\to+\infty} F(t_{n_k}) = (h_-)\int_\Omega \varphi_1 dx < 0.$$

Per il Teorema di esistenza degli zeri, si ha che: qualsiasi sia $t = \int_\Omega f\,\varphi_1 dx$, esiste $s \in \mathbf{R}$, tale che $F(s) = t$; segue da ciò l'esistenza di u, soluzione del problema (3.18).

□

3.4 Il Teorema di Ambrosetti-Prodi

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} L(u) \; = \; g(u) + f & \text{in } \Omega \\ \quad u \; = \; 0 & \text{su } \Gamma \; = \; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.24}$$

con $g \in C^2(\mathbf{R})$, $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e $g(0) = 0$.
Supponiamo che:

a) esistano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^+$ tali che: $\lambda < \lambda_1 < \mu < \lambda_2$, con

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s} = \mu, \quad \lim_{s \to -\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda \quad ;$$

b) $\lambda \leq \frac{g(s)-g(t)}{s-t} \leq \mu \quad \forall\, s,t \in \mathbf{R} \;\; s \neq t$;

c) g sia strettamente convessa.

Esempio La funzione $g(s) = -\lambda s^- + \mu s^+$, con λ, μ come detto sopra, soddisfa le ipotesi a), b), c).

Teorema 3.4.1. (di Ambrosetti-Prodi) *Se valgono le ipotesi* a), b), c) *allora esiste* $\bar{t} \in \mathbf{R}$ *tale che:*

1) se $\int_\Omega f \; \varphi_1 dx > \bar{t}$ *non esiste soluzione per il problema* (3.24)*;*

2) se $\int_\Omega f \; \varphi_1 dx = \bar{t}$ *esiste ed unica* u *soluzione per il problema* (3.24)*;*

3) se $\int_\Omega f \; \varphi_1 dx < \bar{t}$ *esistono due soluzioni del problema* (3.24)*.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere u soluzione del problema (3.24) e scriviamola come $u = \bar{u}_s + s\, \varphi_1$ con $s = \int_\Omega u\, \varphi_1 dx$ ed $\bar{u}_s \in E_1^\perp$, allora il problema (3.24), può essere riscritto come:

$$L(u) + \lambda_1 s\, \varphi_1 \; = \; g(\bar{u}_s + s\, \varphi_1) + f \tag{3.25}$$

(avendo sfruttato che (λ_1, φ_1) sono autovalore ed autofunzione dell'operatore L).
Scegliamo dapprima φ_1 come funzione test nella formulazione variazionale del problema (3.25) ed otteniamo:

$$\lambda_1 s - \int_\Omega g(\bar{u}_s + s\, \varphi_1)\, \varphi_1 dx = \int_\Omega f\, \varphi_1 dx, \tag{3.26}$$

poi una qualsiasi funzione $w \in E_1^\perp$, ottenendo:

$$\int_\Omega A(x)\nabla \bar{u}_s \nabla w dx = \int_\Omega g(\bar{u}_s + s\, \varphi_1) w dx + \int_\Omega f w dx \quad \forall w \in E_1^\perp \tag{3.27}$$

Dunque risolvere il problema (3.24), equivale a trovare soluzioni delle equazioni (3.26) e (3.27). Così come nei due paragrafi precedenti, si può far vedere che il funzionale associato al problema (3.27):

$$J_s(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v \nabla v dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v^2 dx - \int_\Omega G(v + s\ \varphi_1)dx - \int_\Omega f v dx$$

con $G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$, è coercitivo su $E_1^\perp$ e che su di esso è anche debolmente semi-continuo inferiormente; pertanto assegnata $s \in \mathbf{R}$, esiste $v_s \in E_1^\perp$ tale che:

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_s \nabla w dx = \int_\Omega g(v_s + s\ \varphi_1) w dx + \int_\Omega f w dx \quad \forall w \in E_1^\perp$$

Per quanto riguarda invece il problema (3.26), si può dimostrare che l'applicazione che ad s associa v_s (soluzione di (3.27)) è continua in $H_0^1(\Omega)$ ed inoltre: esiste $c \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$\|v_s\|_{1,0} \leq c|s|.$$

Detta $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, la funzione:

$$F(s) = \lambda_1 s - \int_\Omega g(v_s + s\ \varphi_1)\ \varphi_1 dx$$

vogliamo risolvere $F(s) = \int_\Omega f\ \varphi_1 dx$.
Come nei due Teoremi precedenti, anche in questo caso, F è continua. Consideriamo poi:

$$\frac{g(v_s + s\ \varphi_1)}{v_s + s\ \varphi_1}\left(\frac{v_s}{s} + \ \varphi_1\right)\ \varphi_1 dx$$

ed osserviamo che se $s \to +\infty$, allora dal fatto che $\frac{\|v_s\|_{1,0}}{s} < c$, si ottiene che esiste $w \in E_1^\perp$ tale che:

$$\frac{v_s}{s} \longrightarrow w \quad \text{in} L^2(\Omega).$$

Definendo poi:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : w(x) + \ \varphi_1(x) > 0\},\ \Omega^- = \{x \in \Omega : w(x) + \ \varphi_1(x) < 0\},$$

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega : w(x) + \ \varphi_1(x) = 0\},$$

come nel secondo paragrafo di questo capitolo, e sfruttando l'ipotesi a), si ottiene:

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{F(s)}{s} = \lambda_1 - \mu \int_{\Omega^+} (w + \ \varphi_1)\ \varphi_1 dx - \lambda \int_{\Omega^-} (w + \ \varphi_1)\ \varphi_1 dx.$$

Per ipotesi, $\lambda < \mu$ e $w + \ \varphi_1 = 0$ su Ω^0, pertanto:

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{F(s)}{s} \leq \lambda_1 - \mu \int_\Omega (w + \ \varphi_1) \ \varphi_1 dx = \lambda_1 - \mu < 0$$

ragionando in modo analogo, si ottiene:

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{F(s)}{s} > \lambda_1 - \lambda > 0.$$

Quindi F ha almeno un massimo, detto $\bar{t} = \max_{s\in\mathbf{R}} F(s)$, quando $\int_\Omega f \ \varphi_1 dx > \bar{t}$, non possono naturalmente esistere soluzioni del problema (3.27) e quindi neppure del problema (3.24); se $\int_\Omega f \ \varphi_1 dx = \bar{t}$, potrebbero esserci dei problemi, qualora la F avesse più di un massimo, ci resta inoltre da far vedere che per $\int_\Omega f \ \varphi_1 dx < \bar{t}$, ci sono proprio due sole soluzioni. Dimostreremo queste due ultime cose in un solo modo, cioè facendo vedere che non possono esistere più di due soluzioni. Se infatti esistessero due massimi, cioè r_1, r_2 tali che $F(r_1) = F(r_2) = \bar{t}$, per la concavità di F (dovuta alla convessità di g) si avrebbe $F(t) = \bar{t} \ \ \forall t \in [r_1, r_2]$, e quindi il problema (3.24), avrebbe infinite soluzioni. Andiamo ora ad usare il metodo sfruttato da Berestycki in [**4**] e che avremo modo di usare nuovamente in seguito.
Qualora u, v fossero due soluzioni del problema (3.24), la loro differenza, $w = u - v$, soddisferebbe l'equazione:

$$L(w) \ = \ h(x)w$$

in $H_0^1(\Omega)$, dove si è indicata con $h(x)$, la funzione:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(u)-g(v)}{u-v} & u \neq v \\ g'(u) & u = v \end{cases}$$

Dunque w è un'autofunzione di un problema agli autovalori con peso $h(x)$, pertanto esiste $i \in \mathbf{N}$ tale che:

$$\lambda_i(h) = 1.$$

Dal momento che, per definizione, $h(x) < \lambda_2$ q.o., allora per il Teorema 3.1.1:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_2} = \lambda_i(\lambda_2) < \lambda_i(h) = 1$$

quindi $\lambda_i < \lambda_2$ (dove con λ_i si è indicato l'i-esimo autovalore di L), dunque, ancora per il Teorema 3.1.1 si ha $\lambda_i = \lambda_1$, cioè $i = 1$. Questo ci garantisce che w è la prima autofunzione del problema agli autovalori con peso $h(x)$, pertanto w è costante in segno; allora u, v sono ordinate.
Supponiamo ora di avere tre soluzioni del problema (3.24), u, v, w, allora si ha per esempio $u < v < w$ q.o.; poste $w_1 = v - u$, $w_2 = w - v$ si ottiene:

$$L(w_1) = h_1(x)w_1, \quad L(w_2) = h_2(x)w_2$$

con $h_1(x), h_2(x)$ definite in modo ovvio in termini di g, u, v, w. Allora come prima, si ha che

$$\lambda_1(h_1) = \lambda_1(h_2) = 1$$

e ciò è impossibile, in quanto la stretta convessità di g, implica che $h_1(x) < h_2(x)$ q.o., da cui ricordando il Teorema 3.1.1, si ha $\lambda_i(h_1) > \lambda_i(h_2)$.

$\square$

Osservazione. Dal momento che data $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, è sempre possibile scrivere f come $f = \bar{f} + t\ \varphi_1$, con $t = \int_\Omega f\ \varphi_1 dx$ e $\int_\Omega \bar{f}\ \varphi_1 dx = 0$, il Teorema di Ambrosetti-Prodi, può essere enunciato anche come segue:
Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} L(u) \ = \ g(u) + \bar{f} + t\ \varphi_1 & \text{in } \Omega \\ \quad u \ = \ 0 & \text{su } \Gamma \ = \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.28}$$

con g che soddisfi tutte le ipotesi del Teorema di Ambrosetti-Prodi, ed $\bar{f}$ come già detto, allora esiste un unico numero reale $\bar{t} = \bar{t}(f)$ tale che:

1) se $t > \bar{t}$ allora il problema (3.28) non ammette alcuna soluzione;

2) se $t = \bar{t}$ allora il problema (3.28) ammette un'unica soluzione;

3) se $t < \bar{t}$ allora il problema (3.28) ammette due (e solo due) soluzioni.