Problemi agli autovalori

Sappiamo già che se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), e se f appartiene a $L^2(\Omega)$ (o, più in generale, a $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$), allora esiste un'unica soluzione u in $H_0^1(\Omega)$ dell'equazione ellittica

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

nel senso che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Sappiamo inoltre che tale soluzione è l'unico punto di minimo in $H_0^1(\Omega)$ del funzionale di Dirichlet

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\, u,$$

punto di minimo che esiste dal momento che il funzionale è *coercitivo*:

$$\lim_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty} I(u) = +\infty,$$

e *debolmente semicontinuo inferiormente*:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \Longrightarrow \quad I(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(u_n).$$

Ci chiediamo ora se la stessa tecnica di minimizzazione funzioni per dimostrare l'esistenza di soluzioni per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. La risposta è evidentemente affermativa se $\lambda < 0$: considerando il funzionale

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega f\, u,$$

esso è evidentemente coercitivo (dato che, essendo $\lambda < 0$, $I_\lambda \geq I$) e debolmente semicontinuo inferiormente dato che

$$u_n \rightharpoonup u \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega u_n^2 \to \int_\Omega u^2,$$

essendo compatta per il Teorema di Rellich l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

I problemi nascono nel caso $\lambda > 0$: il funzionale è illimitato inferiormente se λ è troppo "grande". Sia infatti v in $H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$, e sia $\Lambda > 0$ tale che

$$\Lambda \int_\Omega v^2 \geq 2 \int_\Omega |\nabla v|^2.$$

Chiaramente, un tale valore di Λ esiste sempre se $v \neq 0$. Se calcoliamo $I_\Lambda(tv)$, con $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$I_\Lambda(tv) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\Lambda t^2}{2} \int_\Omega v^2 - t \int_\Omega f\, v \leq -\frac{\Lambda\, t^2}{4} \int_\Omega v^2 - t \int_\Omega f\, v,$$

e dunque

$$\lim_{t \to +\infty} I_\Lambda(tv) = -\infty.$$

D'altro canto, ricordando la disuguglianza di Poincaré:

$$\mathcal{P} \int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

è chiaro che se $0 < \lambda < \mathcal{P}$ il funzionale I_λ è sia coercitivo che debolmente semicontinuo inferiormente, e quindi esiste un minimo in $H_0^1(\Omega)$.

Per capire cosa accade nel caso generale, affrontiamo innanzitutto il problema con $f \equiv 0$, ovvero l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Chiaramente $u \equiv 0$ è una soluzione del problema, ma un confronto con la situazione nel caso unidimensionale ci fa capire che esistono altre possibilità. Se, infatti, consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} \quad -u'' = \lambda\, u & \text{in } (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

troviamo la soluzione nulla se λ non è un quadrato di un numero intero, mentre se $\lambda = n^2$ per qualche n in $\mathbb{N}$ abbiamo le infinite soluzioni $A \operatorname{sen}(nx)$, al variare di A in $\mathbb{R}$.

Per capire cosa accade in dimensione qualsiasi, modifichiamo il problema di minimizzazione, trasformandolo da problema "libero" a problema "vincolato". Sia allora

$$m = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2,\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u^2 = 1 \right\}.$$

Osserviamo innanzitutto che $0 \leq m < +\infty$; sia poi u_n tale che

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \to m, \quad \int_\Omega u_n^2 = 1.$$

Chiaramente u_n è limitata in $H_0^1(\Omega)$, cosicché possiamo estrarne una sottosuccessione (che chiameremo ancora u_n) debolmente convergente in $H_0^1(\Omega)$ ad una funzione u. Dal momento che l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta, l'avere u_n norma 1 in $L^2(\Omega)$ implica che anche u ha norma 1 in $L^2(\Omega)$. In altre parole, il limite debole di u_n soddisfa ancora il vincolo. Si ha allora, ricordando la debole semicontinuità inferiore debole della norma,

$$m \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = m,$$

da cui segue che m è un minimo, e si ha

$$m = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Essendo $u \neq 0$ (dato che ha norma 1 in $L^2(\Omega)$), si ha che $m > 0$. Si può poi dimostrare che il minimo, a meno del segno, è unico. Osserviamo ora che se v è in $H_0^1(\Omega)$, con $v \neq 0$, allora $\frac{v}{\|v\|_{L^2(\Omega)}}$ ha norma 1 in $L^2(\Omega)$, e quindi

$$m \leq \int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

da cui si ottiene

$$m \int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2.$$

Dal momento che tale disuguaglianza è evidentemente vera anche per $v \equiv 0$, si ha

$$(3) \qquad m \int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

In altre parole, $m = \mathcal{P}$, la costante di Poincaré.

Sia ora u una delle due funzioni di norma 1 in $L^2(\Omega)$ che realizza l'uguaglianza in (3); scriviamo $u = u_+ - u_-$, definiamo $v(t) = u_+ - t\,u_-$, e calcoliamo

$$F(t) = \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 - m \int_\Omega v^2(t).$$

Chiaramente $F(t) \geq 0$ per ogni t e $F(1) = 0$. Dal momento che

$$\int_\Omega \nabla u_+ \cdot \nabla u_- = 0 = \int_\Omega u_+\,u_-,$$

si ha

$$(4) \quad F(t) = \int_\Omega |\nabla u_+|^2 - m \int_\Omega u_+^2 + t^2 \left(\int_\Omega |\nabla u_-|^2 - m \int_\Omega u_-^2 \right).$$

Essendo
$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 - m \int_\Omega u_-^2 \geq 0$$
per la (3), da (4) si vede facilmente che
$$\min_{t\in\mathbb{R}} F(t) = F(0) = \int_\Omega |\nabla u_+|^2 - m \int_\Omega u_+^2,$$
a meno che
$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 - m \int_\Omega u_-^2 = 0,$$
nel qual caso F è costante. Essendo $F(1) = 0$ un altro punto di minimo, ne segue che $F(t)$ deve essere costantemente nulla. Pertanto
$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 - m \int_\Omega u_-^2 = 0,$$
da cui segue
$$F(t) = \int_\Omega |\nabla u_+|^2 - m \int_\Omega u_+^2 = 0.$$
In altre parole, se u ha norma 1 in $L^2(\Omega)$ e realizza l'uguaglianza in (3), allora anche u_+ e u_- realizzano l'uguaglianza. Se $u_+ \neq 0$, allora normalizzando u_+ in $L^2(\Omega)$ si ottiene una funzione di norma 1 che realizza l'uguaglianza in (3) e quindi (per l'unicità a meno del segno di u) si ha $u_+ = \pm u$: ne segue che u ha segno costante in Ω, che supporremo quindi positivo.

Che equazione risolve il minimo u? Dal momento che si tratta di minimizzazione vincolata, appariranno dei moltiplicatori di Lagrange. Eseguendo i calcoli si trova che u è soluzione di
$$\begin{cases} -\Delta u = m\, u & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$
Per motivi "storici", definiamo $\lambda_1 = m$ e $\varphi_1 = u$, che chiamiamo rispettivamente *primo autovalore* e *prima autofunzione* del laplaciano in Ω. Pertanto,
$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 = \lambda_1\, \varphi_1 & \text{in } \Omega, \\ \varphi_1 \geq 0,\ \varphi_1 \not\equiv 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad \varphi_1 = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} = 1. \end{cases} \tag{5}$$
Se lasciamo cadere la normalizzazione in $L^2(\Omega)$, allora anche $t\,\varphi_1$ risolve la stessa equazione, qualsiasi sia t in $\mathbb{R}$: in altre parole, le soluzioni

del problema formano uno spazio vettoriale di dimensione almeno 1, che chiameremo E_1. Per quanto detto prima, la dimensione di E_1 è esattamente pari ad 1 (si noti il parallelo con il caso $N = 1$).

Ricordiamo ora che un teorema dovuto a Stampacchia afferma che se v risolve l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

allora v è in $L^\infty(\Omega)$ se f appartiene a $L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$, mentre appartiene a $L^{q^{**}}(\Omega)$, con $q^{**} = \frac{Nq}{N-2q}$, se f appartiene a $L^q(\Omega)$ con $\frac{2N}{N+2} \leq q < \frac{N}{2}$. Supponiamo ora $N = 3$: dal momento che φ_1 è in $H_0^1(\Omega)$, per l'immersione di Sobolev si ha φ_1 in $L^{2^*}(\Omega)$, con $2^* = \frac{2N}{N-2} = 6$. Dal momento che $6 > \frac{3}{2} = \frac{N}{2}$, dal teorema di Stampacchia applicato a (5) con $f = \lambda_1 \varphi_1$ si ha subito che φ_1 è in $L^\infty(\Omega)$. Se $N = 4$, allora φ_1 è in $L^4(\Omega)$, ed essendo $4 > 2 = \frac{N}{2}$ si ha nuovamente φ_1 in $L^\infty(\Omega)$, ed analogamente per $N = 5$. Se $N = 6$, invece, φ_1 è in $L^3(\Omega)$, e $3 = \frac{N}{2}$. Per il secondo risultato di Stampacchia (sempre applicato con $f = \lambda_1 \varphi_1$), però, essendo φ_1 appartenente ad esempio a $L^2(\Omega)$ si ha che φ_1 appartiene a $L^{2^{**}}$, con $2^{**} = 6 > 3 = \frac{N}{2}$. Applicando ora il primo risultato di Stampacchia, si trova che φ_1 appartiene a $L^\infty(\Omega)$ anche se $N = 6$. In dimensione maggiore si può ripetere lo stesso procedimento (più è alta la dimensione, più volte lo si dovrà ripetere), trovando che, in dimensione qualsiasi, φ_1 è in $L^\infty(\Omega)$. A questo punto si usa il teorema di De Giorgi per provare che φ_1 è hölderiana e, da qui, i risultati classici per dimostrare che φ_1 è $C^{2,\alpha}(\Omega)$ e poi $C^{4,\alpha}(\Omega)$ e poi $\ldots$ e poi $C^\infty(\Omega)$ e poi analitica.

Questo metodo, detto di *bootstrap*, funziona tutte le volte (o quasi...) in cui ci si trova a che fare con un'equazione ellittica con la soluzione "da una parte e dall'altra" dell'uguale.

Sappiamo allora risolvere (1) per $\lambda < \lambda_1$ (qualsiasi sia f) e per $\lambda = \lambda_1$ (se $f \equiv 0$). Cosa possiamo dire se $\lambda = \lambda_1$ e $f \neq 0$? Supponiamo che esista una soluzione u: scegliendo φ_1 come funzione test nell'equazione per u e u come funzione test nell'equazione per φ_1, abbiamo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 = \lambda_1 \int_\Omega u\,\varphi_1 + \int_\Omega f\,\varphi_1,$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 = \lambda_1 \int_\Omega u\,\varphi_1,$$

da cui si ricava che deve essere

$$\int_\Omega f\,\varphi_1 = 0.$$

Tale condizione (di ortogonalità in $L^2(\Omega)$) è quindi necessaria per l'esistenza di una soluzione. Per mostrare che è anche sufficiente, consideriamo innanzitutto

$$\lambda_2 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2,\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u^2 = 1,\ \int_\Omega u\,\varphi_1 = 0\right\}.$$

Si può dimostrare (come prima) che λ_2 è un minimo e che si ha $\lambda_2 > \lambda_1$. Scrivendo l'equazione per il minimo si trova una soluzione φ_2 del problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_2 = \lambda_2\,\varphi_2 & \text{in } \Omega, \\ \varphi_2 \not\equiv 0 & \text{in } \Omega, \\ \varphi_2 = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

soluzione che possiamo pensare normalizzata in $L^2(\Omega)$. Chiaramente perdiamo la positività (φ_2 dovendo essere ortogonale a φ_1 deve per forza cambiare segno), ma non la limitatezza (la tecnica di *bootstrap* è ancora applicabile). Lo spazio E_2 di tutte le soluzioni di (6) si dimostra avere dimensione finita (ma, in generale, maggiore o uguale ad 1).

Consideriamo ora il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega f\,u, \quad u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u\,\varphi_1 = 0.$$

Si verifica facilmente che J è debolmente semicontinuo inferiormente e che è coercitivo su $E_1^\perp$, dato che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_2 \int_\Omega u^2, \quad \forall u \in E_1^\perp,$$

e $\lambda_2 > \lambda_1$. Se ne deduce che J ammette minimo su $E_1^\perp$, e che tale minimo v risolve

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1\,v + f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

in $E_1^\perp$, nel senso che v appartiene a $E_1^\perp$ e

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w = \lambda_1 \int_\Omega v\,w + \int_\Omega f\,w, \quad \forall w \in E_1^\perp.$$

Sia ora z in $H_0^1(\Omega)$. Possiamo sempre scrivere $z = t\,\varphi_1 + w$, con w in $E_1^\perp$ e t in $\mathbb{R}$. Scegliendo allora $w = z - t\,\varphi_1$ come funzione test si trova

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(z - t\,\varphi_1) = \lambda_1 \int_\Omega v\,(z - t\,\varphi_1) + \int_\Omega f\,(z - t\,\varphi_1).$$

Essendo v ed f in $E_1^\perp$, si ha

$$\int_\Omega \nabla v\,\nabla\varphi_1 = \int_\Omega v\,\varphi_1 = \int_\Omega f\,\varphi_1 = 0,$$

e quindi

$$\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla z = \lambda_1 \int_\Omega v\,z + \int_\Omega f\,z, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega),$$

cosicché v risolve (1) con $\lambda = \lambda_1$. Ovviamente anche $v + s\,\varphi_1$ risolve la stessa equazione, che ha quindi infinite soluzioni.

Il procedimento può allora continuare, definendo λ_3 come

$$\lambda_3 = \min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2,\ u \in (E_1 \oplus E_2)^\perp,\ \int_\Omega u^2 = 1\right\},$$

e determinando φ_3 ed E_3. Alla fine si ha il seguente risultato.

Teorema 1. *Esiste una successione λ_n (autovalori) crescente e divergente di numeri reali positivi tale che:*

- *Per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste almeno una soluzione non identicamente nulla (autofunzione) di*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = \lambda_n\,\varphi_n & \text{in } \Omega,\\ \varphi_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

- *λ_1 è la costante di Poincaré in Ω.*
- *L'insieme delle soluzioni della precedente equazione è uno spazio vettoriale E_n (autospazio) di dimensione finita, fatto di funzioni in $L^\infty(\Omega)$. Lo spazio E_1 ha dimensione 1 e ogni funzione di E_1 ha segno costante in Ω.*
- *Se φ appartiene ad E_n e ψ appartiene ad E_m (con $n \neq m$), allora φ e ψ sono ortogonali.*
- *Si ha*

$$H_0^1(\Omega) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

- *Se $\lambda \neq \lambda_n$ per ogni n in $\mathbb{N}$, il problema (1) ha una ed una sola soluzione per ogni f in $L^2(\Omega)$.*
- *Se $\lambda = \lambda_n$ per qualche n in $\mathbb{N}$, il problema (1) ha soluzione se e solo se f in $L^2(\Omega)$ appartiene a $E_n^\perp$; in tal caso, esiste un'unica soluzione di (1) in $E_n^\perp$.*

Una volta dimostrato che $H_0^1(\Omega)$ si scrive come somma diretta degli E_n, le ultime due affermazioni del teorema sono facili da dimostrare.

Sia infatti f in $L^2(\Omega)$, che scriviamo

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \, \varphi_n, \quad \beta_n = \int_\Omega f \, \varphi_n.$$

Cercando una soluzione di (1) della forma

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \, \varphi_n,$$

e ricordando che $-\Delta \varphi_n = \lambda_n \, \varphi_n$ per ogni n, si arriva a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((\lambda_n - \lambda) \, \alpha_n - \beta_n \right) \, \varphi_n = 0,$$

da cui (se λ non è un autovalore) si ricava

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{\lambda_n - \lambda},$$

mentre se $\lambda = \lambda_n$ è un autovalore si ha soluzione scegliendo $\alpha_n = 0$ se e solo se $\beta_n = 0$ (e quindi f è in $E_n^\perp$).

Principio di massimo

Sappiamo già che se $\lambda = 0$ e se $f \geq 0$, allora la soluzione di (1) è non negativa. Si dimostra facilmente che se tale proprietà è ancora vera se $\lambda < 0$. Cosa accade se $\lambda > 0$? Iniziamo con il suppore $\lambda \neq \lambda_1$, dato che se $\lambda = \lambda_1$ nessuna funzione $f \geq 0$ può essere ortogonale a φ_1 (che è positiva anch'essa).

Come primo caso, consideriamo $\lambda < \lambda_1$, e sia u l'unica soluzione di (1). Scegliendo u_- come funzione test, otteniamo

$$-\int_\Omega \nabla u_- \cdot \nabla u_- = -\lambda \int_\Omega u_-^2 + \int_\Omega f \, u_-.$$

Dal momento che (per definizione di λ_1)

$$\int_\Omega \nabla u_- \cdot \nabla u_- \geq \lambda_1 \int_\Omega u_-^2,$$

si ha

$$0 \leq \int_\Omega f \, u_- \leq (\lambda - \lambda_1) \int_\Omega u_-^2 \leq 0,$$

da cui si ottiene $u_- = 0$, e quindi $u \geq 0$. Pertanto, il principio di massimo vale se $\lambda < \lambda_1$.

Ebbene, questo è l'unico caso in cui il principio di massimo è valido in generale. Se $\lambda > \lambda_1$ si può dimostrare che non vale, ed anzi, se λ è maggiore di λ_1 ma è vicino a λ_1, vale il cosiddetto *anti-principio* *di massimo*: se $f \geq 0$, allora la soluzione u di (1) è negativa. Che tale fatto possa essere vero si vede facilmente scegliendo $f = \varphi_1$, cui corrisponde la soluzione $u = \varphi_1/(\lambda_1 - \lambda)$, che è negativa se $\lambda > \lambda_1$.

Data l'importanza di λ_1 ai fini del principio del massimo, e dal momento che λ_1 dipende da Ω (a differenza, ad esempio, della costante di Sobolev, che dipende solo dalla dimensione), può essere interessante chiedersi come il primo autovalore dipenda dalla "taglia" di Ω.

Per capire cosa succede, consideriamo l'esempio delle sfere di raggio r. Chiamiamo λ_r il primo autovalore in $B_r(0)$ e $\varphi_r \geq 0$ la corrispondente prima autofunzione:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_r = \lambda_r\,\varphi_r & \text{in } B_r(0), \\ \varphi_r = 0 & \text{su } \partial B_r(0). \end{cases}$$

Definendo $v(x) = \varphi_r(r\,x)$ per x in $B_1(0)$, si ha

$$-\Delta v(x) = -r^2\Delta\varphi_r(rx) = r^2\,\lambda_r\,\varphi_r(rx) = r^2\,\lambda_r\,v(x).$$

Se ne deduce che $v(x)$ è un'autofunzione del Laplaciano in $B_1(0)$, con autovalore $\lambda_? = r^2\,\lambda_r$. Dal momento che v è non negativa, e che solo la prima autofunzione è non negativa, si ha che $\lambda_? = \lambda_1$, e che $v = \alpha\varphi_1$, con $\alpha > 0$ e φ_1 la prima autofunzione del Laplaciano in $B_1(0)$. Si ha allora che $\lambda_1 = r^2\,\lambda_r$, e quindi che

$$\lambda_r = \frac{\lambda_1}{r^2}.$$

Pertanto, più piccolo è il raggio, più grande è il primo autovalore (e quindi è maggiore l'intervallo dei valori di λ per i quali vale il principio del massimo).

In generale, se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sono due aperti, allora $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2)$. Si ha infatti che la prima autofunzione φ_{1,Ω_1} di Ω_1, prolungata a zero in $\Omega_2 \backslash \Omega_1$, appartiene a $H_0^1(\Omega_2)$ ed ha norma 1 in $L^2(\Omega_2)$. Pertanto

$$\lambda_1(\Omega_1) = \int_{\Omega_1} |\nabla\varphi_{1,\Omega_1}|^2 = \int_{\Omega_2} |\nabla\varphi_{1,\Omega_1}|^2 \geq \lambda_1(\Omega_2).$$

Da questi risultati segue che se $\Omega \subset B_r(0)$, allora $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_r = \frac{\lambda_1}{r^2}$. Se r è piccolo, allora il primo autovalore di Ω è grande ed è "più facile" che valga il principio di massimo.

Simmetria delle soluzioni

Il fatto che se il dominio è piccolo allora vale il principio di massimo è il primo caso incontrato in cui la "taglia" di Ω influisce sulle proprietà qualitative delle soluzioni. Il secondo — ben più famoso — è un risultato di simmetria delle soluzioni dovuto a Gidas, Ni e Nirenberg.

Il teorema è il seguente.

Teorema 2. *Sia* $\Omega = B_1(0)$ *e sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione lipschitziana. Sia* u *una soluzione (classica) di*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u(x) = u(|x|)$ *ed* u *è decrescente (come funzione di* $|x|$*).*

Dimostrazione. Per semplicità, supponiamo di essere in $\mathbb{R}^2$ (la dimostrazione è analoga in dimensione maggiore di 2). Dette (x, y) le varabili, sia $-1 < \lambda \leq 0$ e sia r_λ la retta $x = \lambda$. Definiamo

$$\Omega_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \lambda,\ (2\lambda - x, y) \in \Omega\},$$

e definiamo

$$\tilde{u}(x, y) = u(2\lambda - x, y), \quad (x, y) \in \Omega_\lambda.$$

Considerando u e $\tilde{u}$ su $\overline{\Omega}_\lambda$, abbiamo $u = \tilde{u}$ se $x = \lambda$, mentre sulla

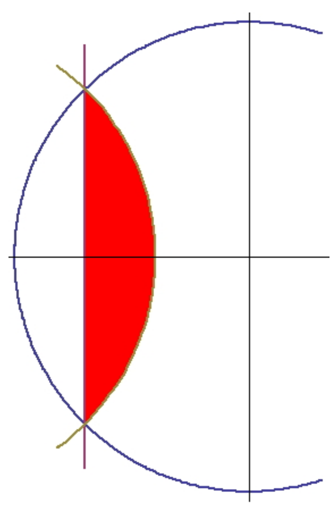

Figura 1. Ω_λ è la zona colorata di rosso

parte di frontiera di Ω_λ "proveniente" dalla frontiera di Ω abbiamo $u > 0$ (per ipotesi) e $\tilde{u} = 0$ (dato che u è zero sulla frontiera di Ω). Siccome derivando due volte $\tilde{u}$ rispetto ad x il segno cambia due volte, abbiamo

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega_\lambda, \quad -\Delta\tilde{u} = f(\tilde{u}) \text{ in } \Omega_\lambda,$$

e quindi, detta $w_\lambda = u - \tilde{u}$, si ha

$$-\Delta w_\lambda = f(u) - f(\tilde{u}) = \frac{f(u) - f(\tilde{u})}{u - \tilde{u}}\, w_\lambda = g\, w_\lambda, \text{ in } \Omega_\lambda,$$

dove

$$g(x,y) = \frac{f(u(x,y)) - f(\tilde{u}(x,y))}{u(x,y) - \tilde{u}(x,y)}$$

è una funzione limitata essendo f lispchitziana. In sostanza si ha

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda = g\, w_\lambda & \text{in } \Omega_\lambda, \\ \quad w_\lambda \geq 0 & \text{su } \partial\Omega_\lambda. \end{cases}$$

Se λ è sufficientemente vicino a -1, il primo autovalore di Ω_λ è maggiore della costante di lipschitzianità di f (Ω_λ si può infatti racchiudere in una sfera di raggio r sufficientemente piccolo), cosicché il principio di massimo è valido in Ω_λ. Se ne deduce che $w_\lambda > 0$ in Ω_λ se λ è "vicino" a -1, e quindi

$$u(x,y) > \tilde{u}(x,y) = u(2\lambda - x, y), \quad (x,y) \in \Omega_\lambda.$$

Definiamo allora

$$E = \{-1 < \lambda \leq 0 : w_\mu(x,y) > 0 \text{ in } \Omega_\mu \text{ per ogni } -1 < \mu \leq \lambda\}.$$

Grazie a quanto abbiamo appena detto, E è non vuoto, e quindi

$$-1 < \Lambda = \sup E \leq 0\,.$$

Se $\Lambda < 0$, usando il fatto che $w_\mu > 0$ per ogni $\mu < \Lambda$, si dimostra (usando nuovamente il principio di massimo) che $w_{\Lambda+\varepsilon} > 0$ per ogni ε tale che $\Lambda + \varepsilon \leq 0$, arrivando così ad un assurdo. Se ne deduce che $\Lambda = 0$ (lo stesso ragionamento non si può ripetere perché se $\lambda > 0$ si ha che Ω_λ non è più contenuto in Ω), e quindi che

$$u(x,y) > u(2\lambda - x, y) \text{ in } \Omega_\lambda \quad \forall \lambda < 0.$$

Facendo tendere λ a zero, si ottiene $u(x,y) \geq u(-x,y)$ per ogni (x,y) in Ω_0 (e Ω_0 è il semicerchio).

Ripetendo il discorso con $\lambda > 0$ (e riflettendo Ω a sinistra della retta $x = \lambda$) si ottiene $u(x,y) \leq u(-x,y)$ per ogni (x,y) in Ω_0, e quindi $u(x,y) = u(-x,y)$ per ogni (x,y) in Ω.

La stessa tecnica si può ripetere considerando una qualsiasi direzione del piano: se r è la retta passante per l'origine avente tale direzione, la u è simmetrica a sinistra ed a destra di tale retta (dato che Ω viene diviso in due metà speculari).

Siano ora $P = (0,r)$ (con $0 < r < 1$), e sia Q un altro punto posto a distanza r dall'origine. Considerando la bisettrice dell'angolo OPQ, P e Q sono simmetrici rispetto ad essa, e quindi $u(P) = u(Q)$.

Abbiamo così dimostrato che se $x^2+y^2=r^2$, allora $u(x,y)=u(0,r)$, e quindi u è radiale. Il fatto che sia decrescente segue dal fatto che se $r_1 > r_2$ allora $(0,r_1)$ e $(0,r_2)$ sono simmetrici rispetto alla retta $y=\frac{r_1+r_2}{2}$ e quindi $u(0,r_2) > u(0,r_1)$. $\square$

Si noti che il metodo, detto del *moving plane*, di far muovere la retta $x=\lambda$ verso destra funziona finché l'insieme Ω_λ è contenuto in Ω, dato che in questo caso è possibile confrontare u con la sua riflessa. Se, quindi, Ω non è una sfera, ma ad esempio un'ellisse, si può spostare la retta $x=\lambda$ fino a $\lambda=0$, e la retta $y=\lambda$ fino a $\lambda=0$, ma non altre rette, dato che l'ellisse manca di simmetria in altre direzioni. In ogni caso, si riesce a dimostrare che u è simmetrica rispetto agli assi, ovvero che la soluzione eredita la simmetria dell'insieme.

L'importanza di tale teorema è chiara: se $\Omega = B_1(0)$, il problema di risolvere l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

viene ricondotto al problema di risolvere l'equazione differenziale ordinaria

$$-\frac{1}{r^{N-1}}\,(r^{N-1}\,u'(r))' = f(u(r)),\ u(1)=0,\ u'(0)=0.$$

Equazioni sublineari

In questo e nel prossimo paragrafo studieremo l'esistenza di soluzioni positive per equazioni ellittiche della forma

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

nei casi particolari in cui $g(s)=s^\theta$ (con $0<\theta<1$) e $g(s)=s^p$ (con $p>1$). Prima di affrontare lo studio del primo dei due casi, cerchiamo di capire perché è ragionevole aspettarsi soluzioni. O, meglio, perché per determinate funzioni g (ad esempio $g(s)=\lambda\,\mathrm{e}^s$ con λ grande) il problema possa non avere soluzione.

Esattamente come nel caso $g(s)=\lambda_1\,s+f(x)$, scegliamo φ_1 come funzione test nel problema risolto da u e viceversa. Otteniamo

$$\int_\Omega g(u)\,\varphi_1 = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi_1 = \int_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla u = \lambda_1\int_\Omega u\,\varphi_1,$$

da cui si deduce

$$\int_\Omega [g(u) - \lambda_1 u]\, \varphi_1 = 0.$$

Se abbiamo $g(s) \geq \lambda_1(s)$ per ogni $s \geq 0$ (o, equivalentemente, $g(s) \leq \lambda_1(s)$ per ogni $s \geq 0$), è allora chiaro che l'identità precedente non può essere soddisfatta: il problema non ha alcuna soluzione positiva.

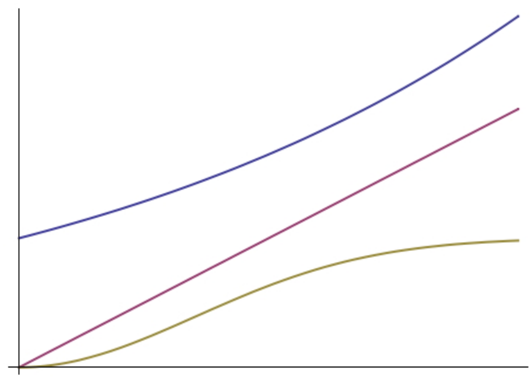

FIGURA 2. Due funzioni per le quali non c'è esistenza

Nel caso in cui $g(s)$ sia s^θ (ovvero s^p), la retta $\lambda_1\, s$ taglia il grafico di g.

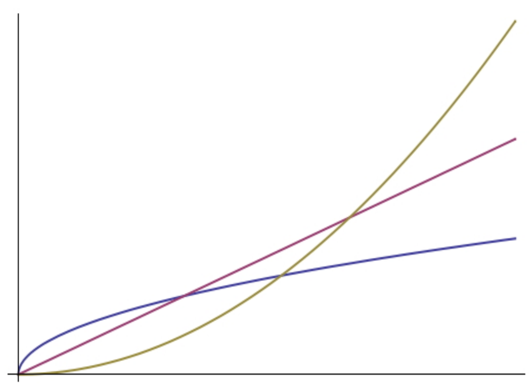

FIGURA 3. Due funzioni per le quali potrebbe esserci esistenza

Questo fatto non vuol dire che esistono di sicuro soluzioni del problema, anche se è spesso vero che il numero delle volte in cui la retta $\lambda_1\, s$ taglia il grafico di g dà un'informazione sul numero di soluzioni positive del corrispondente problema.

Questo è il caso per l'equazione

$$
\begin{cases} -\Delta u = u^\theta & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}
$$

con $0 < \theta < 1$. Per dimostrare che (7) ammette almeno una soluzione, consideriamo il seguente funzionale

$$
I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{\theta+1}\int_\Omega u_+^{\theta+1}, \qquad u \in H_0^1(\Omega).
$$

Osserviamo che I è ben definito (essendo $\theta+1 < 2$) e che è debolmente semicontinuo inferiormente (sempre perché, essendo $\theta+1 < 2$, l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{\theta+1}(\Omega)$ è compatta). Si ha poi, per le disuguaglianze di Hölder e Poincaré,

$$
I(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{|\Omega|^{1-\frac{\theta+1}{2}}}{\theta+1}\left(\int_\Omega u_+^2\right)^{\frac{\theta+1}{2}} \geq C_1 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_2 \|u\|^{\theta+1}_{H_0^1(\Omega)}.
$$

Essendo $\theta + 1 < 2$, $I(u)$ diverge positivamente se la norma di u in $H_0^1(\Omega)$ diverge, e quindi I è coercitivo. Si ottiene così l'esistenza di un minimo u per I, minimo che risolve

$$
\begin{cases} -\Delta u = u_+^\theta & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}
$$

Dal momento che u_+^θ è non negativa, il principio del massimo implica che u è non negativa. Pertanto, essendo $u_+ \equiv u$, si ha

$$
\begin{cases} -\Delta u = u^\theta & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}
$$

Si noti che per dimostrare che I è ben definito, che I è debolmente semicontinuo inferiormente, e che I è coercitivo, abbiamo usato solo il fatto che $s^{\theta+1}$ cresce all'infinito meno di s^2 (volendo, che s^θ è minore di $\lambda_1\, s$ all'infinito).

Abbiamo trovato la nostra soluzione? Non necessariamente: la funzione $u \equiv 0$ risolve lo stesso problema, e noi stiamo cercando soluzioni non banali. Come possiamo essere sicuri che il punto di minimo u di I non sia la funzione nulla? Calcoliamo $I(t\varphi_1)$: otteniamo

$$
I(t\varphi_1) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 - \frac{t^{\theta+1}}{\theta+1}\int_\Omega \varphi_1^{\theta+1} = C_1\, t^2 - C_2\, t^{\theta+1}.
$$

Dal momento che $\theta + 1 < 2$, si ha $C_1\, t^2 - C_2\, t^{\theta+1} < 0$ per t sufficientemente vicino a zero. Pertanto, il valore minimo di I è strettamente negativo. Essendo $I(0) = 0$, $u \equiv 0$ non può essere il minimo, e quindi la soluzione trovata non è identicamente nulla.

Si noti che per dimostrare che il minimo non è banale abbiamo usato il fatto che $s^{\theta+1}$ è maggiore di s^2 vicino a zero (volendo, che s^θ è maggiore di $\lambda_1\, s$ per s tendente a zero).

Equazioni superlineari

Molto differente dal caso $g(s) = s^\theta$ (con $0 < \theta < 1$) è il caso in cui $g(s) = s^p$ (con $p > 1$). Anche in questo caso la retta $\lambda_1\, s$ interseca il grafico di g per cui sembrerebbe che ci si possa aspettare l'esistenza di soluzioni.

Come nel caso sublineare, proviamo l'approccio funzionale e definiamo

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1}, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Chiaramente I non è ben definito per ogni valore di p: deve essere, infatti, $p + 1 \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$, ovvero $p \leq \frac{N+2}{N-2}$. Se p è più grande, non è detto che una funzione u in $H_0^1(\Omega)$ appartenga ad $L^{p+1}(\Omega)$. Fatta questa restrizione, ci chiediamo se I sia debolmente semicontinuo inferiormente. La risposta è affermativa, ma p non può essere uguale a $\frac{N+2}{N-2}$, dato che l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{2^*}(\Omega)$ non è compatta. Per cui I è debolmente semicontinuo inferiormente se e solo se $p < \frac{N+2}{N-2}$. Per tali valori di p, I è coercitivo? No: se, infatti, calcoliamo $I(t\varphi_1)$ per $t > 0$, abbiamo

$$I(t\varphi_1) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega \varphi_1^{p+1} = C_1\, t^2 - C_2\, t^{p+1}.$$

Essendo $p + 1 > 2$, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} I(t\varphi_1) = -\infty,$$

cosicché I non solo non è coercitivo, ma è anche illimitato inferiormente. D'altra parte, se $t < 0$ si ha

$$I(t\varphi_1) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2,$$

e quindi I è illimitato superiormente. Cosa fare?

Come già nel caso lineare, tentiamo la minimizzazione vincolata: definiamo

$$m = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2,\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u^{p+1} = 1 \right\}.$$

Se $p < \frac{N+2}{N-2}$ si vede facilmente (usando la compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{p+1}(\Omega)$) che m è un minimo, raggiunto in corrispondenza di una funzione $v \neq 0$. Scrivendo l'equazione risolta da v, otteniamo

$$\begin{cases} -\Delta v = m\,|v|^{p-1}\,v & \text{in } \Omega, \\ \qquad v = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ponendo $u = m^{\frac{1}{p-1}}\,v$, si verifica facilmente che u soddisfa l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}\,u & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

e $u \neq 0$. Ragionando come nel caso lineare, si vede che si può scegliere u di segno costante, ottenendo così una soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Cosa succede nel caso $p \geq \frac{N+2}{N-2}$? Per dimostrare che in generale non esiste soluzione abbiamo bisogno di un risultato preliminare (importante di per sé).

Teorema 3 (Identità di Pohozaev). *Sia u una soluzione di*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \textit{in } \Omega, \\ \quad u \geq 0 & \textit{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora, detta $G(s)$ la primitiva di g nulla in zero, si ha

$$\int_\Omega \left[\left(1 - \frac{N}{2}\right) g(u)\,u + N G(u) \right] = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\,(x \cdot \nu)\,d\sigma, \tag{9}$$

Dimostrazione. Moltiplichiamo l'equazione per $x \cdot \nabla u$ ed integriamo (si noti che tale funzione non è nulla sulla frontiera di Ω, per cui compariranno dei termini di bordo). Si ha

$$(A) = \int_\Omega -\mathrm{div}(\nabla u)\,x \cdot \nabla u = \int_\Omega g(u)\,x \cdot \nabla u = (B).$$

Si ha, usando il teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} (B) \quad &= \int_\Omega x \cdot \nabla G(u) = \int_\Omega [\mathrm{div}(x\,G(u)) - \mathrm{div}(x)\,G(u)] \\ &= \int_{\partial\Omega} G(u)\,x \cdot \nu\,d\sigma - N \int_\Omega G(u) = -N \int_\Omega G(u), \end{aligned}$$

essendo $G(u) = 0$ su $\partial\Omega$ e $\operatorname{div}(x) = N$. Prima di lavorare con (A), eseguiamo alcuni calcoli:

$$\operatorname{div}(\nabla u)\, x \cdot \nabla u = \operatorname{div}((x \cdot \nabla u)\, \nabla u) - \nabla(x \cdot \nabla u) \cdot \nabla u.$$

Ora

$$\begin{aligned}
\nabla(x \cdot \nabla u) \cdot \nabla u &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \\
&= |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\, x \cdot \nabla(|\nabla u|^2) \\
&= |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{div}(x\, |\nabla u|^2) - \frac{1}{2} \operatorname{div}(x)\, |\nabla u|^2 \\
&= \left(1 - \frac{N}{2}\right) |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{div}(x\, |\nabla u|^2).
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\operatorname{div}(\nabla u)\, x \cdot \nabla u = \operatorname{div}((x \cdot \nabla u)\, \nabla u) - \left(1 - \frac{N}{2}\right) |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(x\, |\nabla u|^2),$$

da cui

$$(A) = -\int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u)\, (\nabla u \cdot \nu)\, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\, (x \cdot \nu)\, d\sigma + \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Su $\partial\Omega$ possiamo scrivere

$$\nabla u = (\nabla_\tau u, \nabla_\nu u),$$

dove con ∇_τ abbiamo indicato le derivate sul piano tangente a $\partial\Omega$ e con ∇_ν la derivata normale. Essendo $u = 0$ su $\partial\Omega$, tutte le sue derivate tangenziali sono nulle, e quindi

$$\nabla u = (\nabla u \cdot \nu)\, \nu \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Pertanto, sempre su $\partial\Omega$,

$$|\nabla u|^2\, (x \cdot \nu) = |\nabla u \cdot \nu|^2 (x \cdot \nu) = (x \cdot \nabla u)\, (\nabla u \cdot \nu),$$

e quindi

$$(A) = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \,(x\cdot\nu)\, d\sigma + \left(1-\frac{N}{2}\right)\int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Essendo

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} g(u)\, u,$$

si ha allora

$$\int_{\Omega}\left[\left(1-\frac{N}{2}\right) g(u)\, u + NG(u)\right] = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\,(x\cdot\nu)\, d\sigma,$$

come volevasi dimostrare. □

Supponiamo ora che Ω sia stellato rispetto all'origine (e quindi $x\cdot\nu \geq 0$ per ogni x in $\partial\Omega$) e prendiamo $g(s) = s^p$. Essendo $G(s) = s^{p+1}/(p+1)$, l'identità di Pohozaev implica

$$\int_{\Omega}\left(1-\frac{N}{2}+\frac{N}{p+1}\right) u^{p+1} = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2\,(x\cdot\nu)\, d\sigma \geq 0.$$

Se $p+1 > \frac{2N}{N-2}$, la quantità $1-\frac{N}{2}+\frac{N}{p+1}$ è negativa, e quindi $u \equiv 0$: non esistono soluzioni positive per (8) se $p > \frac{N+2}{N-2}$. Se $p+1 = \frac{2N}{N-2}$ allora la quantità $1-\frac{N}{2}+\frac{N}{p+1}$ è nulla, e quindi $|\nabla u| \equiv 0$ su $\partial\Omega$. Questo fatto (assieme all'essere u soluzione di (8)), implica nuovamente che $u \equiv 0$: non esistono soluzioni positive per (8) se $p = \frac{N+2}{N-2}$.