Controllo di Sistemi

Master in Calcolo Scientifico

Italo Capuzzo Dolcetta
Dipartimento di Matematica, Università di Roma - La Sapienza

March 13, 2006

1. Generalità sui sistemi di controllo
2. Controllabilità , osservabilità , stabilizzabilità
2. Il problema di controllo ottimo di Mayer
2.1 Esistenza di soluzioni 2.2 La funzione valore

1 Generalità sui sistemi di controllo

Un sistema di controllo è una coppia (f, U) dove U è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ un funzione continua su $\mathbb{R}^n \times U$. L'insieme U è chiamato insieme dei controlli, $\mathbb{R}^n$ è lo spazio degli stati, il campo vettoriale f è la dinamica.
L'equazione che governa lo stato del sistema è

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \ , \ t \in (0, +\infty) \qquad (1) \\ x(0) &= x \qquad (2) \end{aligned}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato occupato dal sistema al tempo iniziale 0 e la funzione $u : (0, +\infty) \to U$, detta strategia di controllo, è una funzione integrabile secondo Lebesgue. Denoteremo con $\mathcal{U}$ l'insieme di tali funzioni, osservando che contiene propriamente l'insieme $\mathcal{U}^{\mathcal{PC}}$ formato dalle funzioni continue a tratti definite su $(0, +\infty)$ a valori in U.
Una funzione $\Sigma : \mathbb{R}^n \to U$ è una legge di controllo feedback se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un'unica soluzione $x(t; x, \Sigma)$ di

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), \Sigma(x(t))\right) \ , \ t \in (0, +\infty) \qquad (3) \\ x(0) &= x \qquad (4) \end{aligned}$$

Se la funzione $t \to \Sigma\left(x(t; x, \Sigma)\right)$ risulta integrabile secondo Lebesgue allora la strategia di controllo

$$u(t) := \Sigma\left(x(t; x, \Sigma)\right)$$

appartiene alla classe $\mathcal{U}$. Tali strategie di controllo feedback (o, a circuito chiuso) sono di particolare importanza applicativa in quanto la loro esecuzione può essere implementata in modo automatico più facilmente di una generica strategia di controllo. Indicheremo con $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}$ il sottoinsieme di $\mathcal{U}$ formato dalle strategie di controllo feedback. Le condizioni di base che assumeremo sui dati sono le seguenti:

$$\text{(C0)} \qquad U \qquad \text{è un insieme chiuso e limitato di } \mathbb{R}^m \qquad (5)$$

$$\text{(C1)} \qquad \text{esiste una costante } K_1 > 0 \text{ tale che } |f(x_2, u) - f(x_1, u)| \leq K_1 |x_2 - x_1| \qquad (6)$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, u \in U$. Osserviamo che la continuità di f, insieme con le condizioni (5) e (6) implicano che la funzione $x \to f(x, u)$ deve necessariamente essere sublineare, cioè

$$|f(x, u)| \leq \max_{u \in U} |f(0, u)| + K_|x|, \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in U$$

La teoria delle equazioni differenziali ordinarie assicura, nelle ipotesi fatte, che per ogni scelta di $x \in \mathbb{R}^n$ e di $u \in \mathcal{U}$, esiste un'unica funzione $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ che verifica l' equazione integrale

$$x(t) = x + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

Tale funzione, che denoteremo con $x(t; x, u)$ per evidenziare la dipendenza da x e u verifica ovviamente $x(0; x, u) = x$; è inoltre derivabile quasi ovunque rispetto a t e la sua derivata rispetto a t verifica l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

per quasi ogni $t \in (0, +\infty)$. Osserviamo esplicitamente che in ogni intervallo (t_1, t_2) in cui u è continua la soluzione dell'equazione integrale è derivabile rispetto a t e di conseguenza verifica l'equazione di stato (10) ad ogni istante t. Si rinvia a [?] per la dimostrazione di questo risultato fondamentale e per gli altri aspetti rilevanti della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.
La traiettoria del sistema di controllo determinata dallo stato iniziale x e dalla strategia di controllo $u \in \mathcal{U}$ è la curva in $\mathbb{R}^n$ definita come immagine di $[0, +\infty)$ attraverso la funzione $t \to x(t; x, u)$.
Fissata una strategia di controllo $u \in \mathcal{U}$, il flusso associato al sistema di controllo (10) è la famiglia Φ_t^u, parametrizzata da t, formata dalle applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in se definite da

$$\Phi_t^u(x) = x(t; x, u)$$

Raccogliamo nella seguente Proposizione alcune utili proprietà della famiglia Φ_t^u, ovvero della soluzione del sistema di controllo (10) .

Proposizione 1. *Sia $t_1 > 0$. Allora:*
(i) (limitatezza locale) per ogni $r > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$|\Phi_t^u(x)| \leq R$$

per ogni $t \in [0, t_1]$, per ogni $u \in \mathcal{U}$ e per ogni x tale che $|x| < r$.
(ii) (dipendenza continua dal dato iniziale) esiste $c > 0$ tale che

$$|\Phi_t^u(x) - \Phi_t^u(x')| \leq c\,|x - x'|$$

per ogni $t \in [0, t_1]$, per ogni $u \in\ U$ e per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^n$
(iii) (proprietà di semigruppo) per ogni $u \in \mathcal{U}$ si ha

$$\Phi_0^u(x) = x \qquad \Phi_{t+s}^u(x) = \Phi_t^u\left(\Phi_s^u(x)\right)$$

per ogni $s, t \in (0, +\infty)$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 1. *Sistemi lineari*
I sistemi lineari sono quelli in cui la dinamica dipende linearmente sia dallo stato che dal controllo e quindi

$$f(x, u) = Ax + Bu$$

dove A è una matrice $n \times n$ e B una matrice $n \times m$. Dato che

$$|f(x, u) - f(x', u')| \leq ||A||\,|x - x'| + ||B||\,|u - u'|\,,$$

il campo vettoriale f risulta continuo su $\mathbb{R}^n \times U$ e l' ipotesi (C1) è verificata con $K_1 = ||A||$.
La teoria delle equazioni differenziali ordinarie lineari fornisce anche la seguente formula di rappresentazione per la soluzione

$$x(t; x, u) = e^{tA}x + e^{tA}\int_0^t e^{-\tau A}Bu(\tau)\,d\tau$$

In questa formula si è denotata con $e^{\sigma A}$ la matrice esponenziale definita per $\sigma \in \mathbb{R}$ da

$$e^{\sigma A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sigma\, A)^k}{k!}\,.$$

nel caso di sistemi lineari si ha quindi la seguente rappresentazione esplicita del semigruppo associato al sistema di controllo

$$\Phi_t^u(x) = e^{tA}\left(x + \int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau)\, d\tau\right)$$

Un caso semplice ma significativo di sistema di controllo lineare è quello in cui $A = 0$; in questo caso particolare $x(t; x, u) = \Phi_t^u(x) = x + \int_0^t Bu(\tau)\, d\tau$.

Esempio 2. *Sistemi bilineari*
Una classe importante di sistemi nonlineari è quella dei sistemi bilineari in cui la dinamica è lineare nella variabile di controllo ma non in quella di stato e cioè

$$f(x, u) = Ax + B(x)u$$

con Amatrice $n \times n$ e $B(x)$matrice $n \times m$ dipendente con continuità da x. Se $x \to B(x)$ è lipschitziana con una certa costante L_B, allora si ha

$$|f(x, u) - f(x', u)| = |Ax - Ax'| + |B(x) - B(x')|\, |u| \leq (||A|| + L_B\, |u|)\, |x - x'|$$

e quindi l' ipotesi (C1) è verificata con $K_1 = L_B\, M$ dove $M \geq |u|$ per ogni $u \in U$ (ricordare l'ipotesi (C0)). Osserviamo che le ipotesi (C0) e (C1) implicano che

$$|B(x)u)| \leq |B(0)\, u| + K_1|x| \leq ||B(0)||\, M + K_1|x|$$

e quindi la restrizione che la crescita all'infinito di $x \to B(x)$ sia al più lineare.
Osserviamo anche che nel caso bilineare in questione non è disponibile in generale una formula di rappresentazione per la soluzione dell' equazione di stato (10). Per illustrare questo fatto consideriamo l'equazione 1- dimensionale $\dot{x}(t) = B(x(t))u(t)$ dove $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $U \subset \mathbb{R}$. Supponendo che $B(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, si verifica, usando le regole di derivazione delle funzioni composte e della funzione inversa, che la soluzione di dato iniziale x è data dalla formula

$$x(t; x, u) = \overline{B}^{-1}\left(\int_0^t u(s)\, ds\right)$$

dove $\overline{B}(z) = \int_x^z \frac{1}{B(\xi)}\, d\xi$. Ovviamente tale formula non è facilmente estendibile al caso in cui la funzione $B(x)$ non è invertibile in qualche punto x.

Osservazione 1. Con riferimento a sistemi bilineari

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(x(t))u(t) \tag{7}$$

il termine $B(x(t))u(t)$ ha il significato modellistico di "parte controllata" della velocità $\dot{x}$ del sistema in opposizione al termine $Ax(t)$ che rappresenta la "parte libera" della velocità .

Nell'ottica della teoria del controllo, il contributo $B(x(t))u(t)$ pu essere scelto, attraverso la scelta di $u(t)$, al fine di realizzare un particolare comportamento delle traiettorie del sistema, per esempio raggiungimento di uno stato $\overline{x}$ a partire da uno stato x, stabilizzazione ad un punto di equilibrio o ad una traiettoria periodica, eventualmente in aggiunta a proprietà di ottimalità rispetto ad un fissato criterio. Un altro modo di vedere il termine $B(x(t))u(t)$ nel modello è quello di una perturbazione data (nonlineare e globale) del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$; in questa ottica si può considerare ad esempio il problema di studiare il comportamento limite per $t \to +\infty$ del sistema perturbato in relazione al comportamento limite del sistema libero$\dot{x}(t) = Ax(t)$.
Una ulteriore interpretazione del modello (7) si ha quando sull'insieme è definita una misura di probabilità ; in questa situazione $x(t)$ è un processo stocastico; problemi di interesse in questo caso riguardano, ad esempio, l'esistenza di una soluzione stazionaria (ergodica), la legge dei grandi numeri, proprietà di grandi deviazioni.

2 Controllabilità , osservabilità , stabilizzabilità

Consideriamo il sistema di controllo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \ , \ t \in (0, +\infty) && (8) \\ x(0) &= x && (9) \end{aligned}$$

nel quadro delle ipotesi della Sezione 1. Il problema della controllabilità può essere formulato come segue:
quali punti iniziali x possono essere trasportati in tempo finito in un dato insieme $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ (il bersaglio) da una opportuna traiettoria di (10) ? Formalmente, si tratta quindi di determinare l'insieme controllabile

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \cup_{t \geq 0} \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(t)$$

dove gli insiemi $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(t)$ sono definiti da

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(t; x, u) \in \mathcal{B} \text{ per qualche } u \in \mathcal{U}\} \, .$$

Esempio 3. Consideriamo il sistema di controllo lineare unidimensionale

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad , \quad U = [-1, 1]$$

e bersaglio $\mathcal{B} = \{0\}$. Si ha $x(t; x, u) = xe^t + e^t \int_0^t e^{-s} u(s) ds =$. Se $x \geq 0$ allora, scegliendo la strategia di controllo $u(s) \equiv -1$ si trova $y(t; x, -1) = xe^t - e^t(1 - e^- t)$ e quindi $y(t; x, -1) = 0$ se e solo se $x = \frac{e^t - 1}{e^t}$. Analogamente, se $x < 0$ allora, scegliendo la strategia dil controllo $u(s) \equiv 1$ si trova $y(t; x, 1) = xe^t + e^t(1 - e^- t)$ e quindi $y(t; x, 1) = 0$ se e solo se $x = \frac{1 - e^t}{e^t}$. Se ne conclude che per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\mathcal{C}_{\{0\}}(t) = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1 - e^t}{e^t}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{e^t - 1}{e^t}\}$$

e quindi $\mathcal{C}_{\{0\}} = [-1, 1]$.

Esempio 4. Consideriamo il sistema di controllo bilineare unidimensionale

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t) \quad , \quad U = [-1, 1]$$

e bersaglio $\mathcal{B} = \{0\}$. Dato che $x(t; x, u) = xe^{\int_0^t u(s)ds}$, se $x \neq 0$ allora $x(t; x, u) \neq 0$ per ogni t e per ogni $u \in \mathcal{U}$. Quindi $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(t) = \{0\}$ per ogni t e pertanto $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \{0\}$.
Prendendo invece come bersaglio $\mathcal{B} = [1, +\infty)$ si trova che $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = (0, +\infty)$. Infatti, per ogni fissato $x > 0$ si trova, scegliendo il controllo $u(s) \equiv 1$, che $x(t; x, u) = xe^t = 1 \in \mathcal{B}$ per $t = \frac{1}{x}$. D'altra parte, se $x < 0$ allora $x(t; x, u) < 0$ per ogni t e per ogni $u \in \mathcal{U}$.

Esempio 5. Consideriamo il sistema lineare in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}(t) = Bu(t)) \ , \ t \in (0, +\infty) \tag{10}$$

$$x(0) = x \tag{11}$$

con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e bersaglio $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$. E' facile verificare che l'insieme $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ in questo caso è la striscia $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leq 1\}$. Nel caso $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha invece $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \mathbb{R}^2$.

Nelle applicazioni si presentano frequentemente situazioni in cui non lo stato del sistema ma solo una sua funzione è osservabile; per modellizzare queste situazioni si considera anzichè il sistema differenziale di controllo (10) il seguente sistema misto

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \ , \ t \in (0, +\infty) \tag{12}$$

$$y(t) = h(x(t)) \tag{13}$$

$$x(0) = x \tag{14}$$

dove $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ con $p \leq n$ è una funzione data. Due stati iniziali $x \neq x'$ per il sistema (12) sono indistinguibili se

$$h(x(t; x, u)) = h(x(t; x', u)) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, +\infty)$$

per ogni $u \in \mathcal{U}$ (dove $x(t; x, u)$ e $x(t; x', u)$ sono, rispettivamente, le soluzioni del sistema di controllo (10) corrispondenti ai dati iniziali x e x'). In altre parole, che lo stato iniziale sia x oppure x_2, l'osservazione del sistema è la stessa, qualunque sia la strategia di controllo; in questa situazione non è possibile ricostruire lo stato iniziale dalla conoscenza di $h(x(t; x, u))$. Un sistema (12) che non ha stati indistinguibili viene detto completamente osservabile. Un caso banale di sistema completamente osservabile è quello in cui $p = n$ e h è invertibile; all'estremo opposto si situa il caso in cui $h \equiv 0$ (in questo caso tutti gli stati sono indistinguibili). Una situazione non banale è descritta nel prossimo esempio.

Esempio 6. Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)u(t) && (15)\\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t) && (16)\\
y(t) &= x_1(t) && (17)\\
x(0) &= x && (18)
\end{aligned}$$

Si tratta quindi di un sistema bilineare in $\mathbb{R}^2$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e funzione di osservazione $h(x) = x_1$. Si ha

$$x(t;x,u) = (x_1 + x_2 \int_0^t u(s)ds, x_2 e^t)$$

e quindi $h(x(t)) = x_1 + x_2 \int_0^t e^s u(s)ds$. Se fosse $h(x(t;x,u)) = h(x(t;x',u))$ per ogni $u \in \mathcal{U}$ si avrebbe, scegliendo $u(s) \equiv 0$, che $x_1 = x_1'$; scegliendo poi$u(s) \equiv 1$ si concluderebbe che $x_2 \int_0^t e^s ds = x_2' \int_0^t e^s ds$ e quindi che $x_2 = x_2'$. Il sistema considerato è quindi completamente osservabile.
Se la funzione di osservazione è invece $h(x) = x_2$ allora tutte le coppie di stati iniziali del tipo $x = (x_1, 0), x' = (x_1', 0)$ sono indistinguibili perchè $h(x(t)) = h(x'(t)) = 0$.

3 Il problema di controllo ottimo di Mayer

Data una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (il costo finale), consideriamo per ogni $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ il problema

$$\min_{u \in \mathcal{U}} g\left(x(t;x,u)\right) \tag{19}$$

dove $x(t;x,u)$ è la soluzione di

$$g\dot{x}(s) = f(y(s), u(s)) \ , \ s \in (0, +\infty) \ \ x(0) = x$$

Fissati $t \in [0, +\infty)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, l' insieme raggiungibile $\mathcal{R}(t;x)$ è quello costituito da tutti i punti $z \in \mathbb{R}^n$ del tipo $z = x(t;x,u)$ con $u \in \mathcal{U}$. Il problema (19) può dunque essere riformulato come

$$\min_{z \in \mathcal{R}(t;x)} g\left(z\right) \tag{20}$$

Una strategia di controllo $u^* \in \mathcal{U}$, dipendente dalla scelta di t e x, che realizza il minimo nel problema (19) è un controllo ottimo per il problema di Mayer, la corrispondente traiettoria $y^*(t;x,u^*)$ è una traiettoria ottima.
Cominciamo con il risolvere in maniera "artigianale" un semplice problema di Mayer unidimensionale. Nel paragrafo successivo descriveremo un risultato generale di esistenza di controlli ottimi per il problema (19).
Consideriamo dunque il sistema di controllo $y'(t) = u(t), x(0) = x \in \mathbb{R}, U = [-a, a], a > 0$ ed

il problema (19) con g crescente. Dato che $x(t;x,u) = x + \int_0^t u(\tau)\,d\tau$, dalle disuguaglianze $x - at \le x(t;x,u) \le x + at$ valide per ogni $u \in \mathcal{U}$, segue facilmente che $\mathcal{R}(t;x) = [x - at, x + at]$ e quindi essendo g è crescente se ne deduce che

$$\min_{z \in \mathcal{R}(t;x)} g\,(z) = \min_{z:|z-x| \le at} g(z) = g(x - at)$$

Qualunque sia il punto iniziale x, la strategia di controllo ottima è quella costante $u^*(s) \equiv -a$. La facilità di soluzione del problema in questo esempio dipende in modo cruciale dal fatto che è stato possibile determinare esplicitamente l'insieme raggiungibile.

3.1 Esistenza di controlli ottimi per il problema di Mayer

In questo paragrafo si espone un teorema di esistenza di controlli ottimi per il problema di Mayer.

Teorema 1. *Supponiamo che il sistema di controllo verifichi le condizioni (5) e (6)e che l'insieme*

$$f(x,U) := \{z \in \mathbb{R}^n : z = f(x,u), u \in U\}$$

sia convesso per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo inoltre g continua. Allora per ogni (t,x) fissati in $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ esiste un controllo ottimo per il problema (19).

Osserviamo che nelle ipotesi fatte su f e U, l'insieme $f(x,U)$ è chiuso. Infatti, sia $z_n = f(x,u_n)$ con $u_n \in U$ e supponiamo che $z_n \to \overline{z}$ per $n \to +\infty$. Dato che U è compatto esiste una sottosuccessione u_{n_k} tale che $u_{nk} \to \overline{u} \in U$ per $k \to +\infty$; per continuità di f ne segue che $z_{nk} = f(x,u_{nk}) \to f(x,\overline{u})$. D'altra parte, $z_{nk} \to \overline{z}$ e quindi $\overline{z} = f(x,\overline{u})$ il che prova che $\overline{z} \in f(x,U)$. Ciò mostra che $f(x,U)$ è chiuso.
E' facile verificare che l'ipotesi che $f(x,U)$ sia convesso è verificata sia nel caso di sistemi lineari che di sistemi bilineari se l'insieme dei controlli U è convesso. La dimostrazione consiste nel provare che l'insieme $\mathbb{R}(t;x)$ è compatto e nell'applicazione successiva del Teorema di Weierstrass. La dimostrazione della compattezza è piuttosto delicata e verrà solo schematicamente descritta. ESEMPIO DI NON ESISTENZA (MACKI.STRAUSS '?)

Se g è di classe C^1 e $\mathcal{R}(t;x)$ è un insieme convesso, allora dalla teoria dell'ottimizzazione segue che se z^* è una soluzione di (20) allora per ogni $z \in \mathcal{R}(t;x)$ si ha

$$Dg(z^*) \cdot (z - z^*) \ge 0$$

Se, inoltre, g è convessa allora la disuguaglianza variazionale

$$z^* \in \mathcal{R}(t;x) \qquad Dg(z^*) \cdot (z - z^*) \ge 0 \qquad \forall z \in \mathcal{R}(t;x)$$

è equivalente al problema di minimo (20) .