

Equazioni di Hamilton-Jacobi

Italo Capuzzo Dolcetta
Dipartimento di Matematica, Università di Roma - La Sapienza
capuzzo@mat.uniroma1.it

Federica Dragoni
Scuola Normale Superiore di Pisa
f.dragoni@sns.it

Indice

1	Introduzione.	2
2	Esempi di equazioni di Hamilton-Jacobi.	3
2.1	La distanza euclidea e l'equazione eiconale.	3
2.2	Il problema di tempo minimo.	4
2.3	Un problema di calcolo delle variazioni.	7
2.4	La funzione di Hopf-Lax e la dualità convessa.	8
2.5	Funzione di Hopf-Lax, convoluzione ed equazione del calore.	12
2.6	Moto di fronti secondo velocità normale.	16
3	Soluzioni classiche: il metodo delle caratteristiche.	18
4	Soluzioni viscosità.	21
4.1	Definizioni e proprietà elementari.	21
4.2	Il principio di confronto.	23
5	Esercizi e problemi.	30
5.1	Un semplice esempio unidimensionale.	31

6	Ottica geometrica per l'equazione delle onde e di helmoltz.	32
6.1	Cenni sull'equazione delle onde.	32
6.2	Ottica geometrica: soluzioni oscillanti.	34
	Riferimenti bibliografici.	37

1 Introduzione.

In queste lezioni vorremo dare una panoramica di alcuni recenti sviluppi della teoria delle equazioni di Hamilton-Jacobi.

In particolare ci occuperemo di problemi di Cauchy, del tipo

$$\begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

sia nel caso in cui il dato iniziale sia continuo sia nel caso in cui risulti soltanto semicontinuo.

Durante tutto il corso studieremo il problema (1) nell'ipotesi l'Hamiltoniana $H(x, p)$ risulti continua in entrambe le variabili e convessa in p .

L'ipotesi di convessità rispetto alla variabile gradiente sarà fondamentale per la validità dei risultati che andremo ad illustrare e in particolare per la possibilità di introdurre una formula rappresentativa della soluzione (formula di Hopf-Lax).

Nella prima parte del corso introdurremo il contesto delle equazioni di Hamilton-Jacobi esponendo vari esempi e problemi ad esse collegati. Studieremo in particolare la formula di Hopf-Lax e dimostreremo che, sotto opportune ipotesi, essa fornisce una soluzione quasi ovunque del problema di Cauchy (1).

Dopo affronteremo in dettaglio un sottocaso della formula di Hopf-Lax dato dall'inf-convoluzione e presenteremo un risultato per essa di tipo Grandi Deviazioni.

In seguito presenteremo il metodo delle caratteristiche. Tale metodo si differenzia notevolmente dalla formula di Hopf-Lax già introdotta, in quanto permette di ottenere risultati di esistenza per equazioni di Hamilton-Jacobi senza sfruttare formule rappresentative ma utilizzando invece le soluzioni di equazioni alle derivate ordinarie, opportunamente associate. Tale metodo fornisce soluzioni classiche per il problema di Cauchy (1).

Considerando l'equazione eiconale nell'intervallo $[-1, 1]$ con condizioni di Dirichlet nulle (come vedremo più in dettaglio in seguito) risulta subito evidente il limite delle soluzioni classiche (per quanto concerne l'esistenza) e quello delle soluzioni quasi ovunque (per quanto invece riguarda l'unicità e la stabilità). Per tale motivo introdurremo un nuovo tipo di soluzioni, dette soluzioni viscosità, che meglio rispondono ad entrambi tali problemi nel contesto dello studio di equazioni non lineari. Dopo averne studiato le proprietà principali (tra cui la consistenza rispetto alle soluzioni classiche e le soluzioni quasi ovunque), ci concentreremo in particolare su risultati di unicità per il problema (1) deducibili da opportuni principi di confronto.

Concluderemo queste note con una breve appendice sull'ottica geometrica per l'equazione delle onde e di helmoltz.

2 Esempi di equazioni di Hamilton-Jacobi.

2.1 La distanza euclidea e l'equazione eiconale.

Sia K sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^N , allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ esiste almeno una soluzione $z^*(x) \in K$ del problema di minimizzazione

$$\min_{z \in K} |x - z|. \quad (2)$$

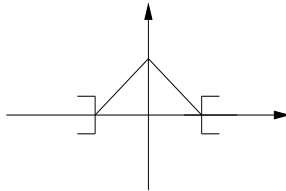
Quindi, la funzione d_K ottenuta ponendo

$$d_K(x) = \min_{z \in K} |x - z| = |z^*(x) - x|,$$

risulta ben definita su tutto \mathbb{R}^N e viene usualmente denominata *distanza da K* .

Osserviamo che, anche se in generale il punto $z^*(x)$ non è univocamente determinato, la funzione d_K risulta ugualmente ben definita. Infatti, presi due punti distinti $z^*(x) \neq z^{**}(x)$, che risolvono (2), si ha $|z^*(x) - x| = |z^{**}(x) - x|$. In corrispondenza dei punti x a cui corrispondono almeno due punti distinti di minima distanza da K si originano fenomeni di non differenziabilità della funzione d_K . Come vedremo in seguito, l'insieme dei punti in cui il problema (2) non ammette unica soluzione ha misura di Lebesgue nulla.

Un esempio molto semplice di tale fenomeno si può avere considerando il caso unidimensionale in cui $K = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. In tale caso si nota subito che al punto $x = 0$ corrispondono due differenti punti che realizzano il minimo del problema (2), dati da $z^*(0) = -1$ e $z^{**}(0) = 1$. Inoltre è immediato notare che nell'origine la corrispondente funzione distanza ha un punto di non differenziabilità.



Come vedremo meglio in seguito, nel linguaggio della teoria dell'ottimizzazione, d_K in realtà è la *funzione valore* del problema di minimo parametrico (2).

È interessante studiare come varia $d_K(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ (per ogni $x \in K$, per definizione, si ha che $d_K(x) = 0$). A questo scopo, fissiamo un punto $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ e un versore arbitrario v , quindi, preso $t > 0$ sufficientemente piccolo, si ha che $x + tv \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Per definizione di d_K , esiste $z^*(x + tv) \in K$ tale che

$$d_K(x + tv) = |z^*(x + tv) - (x + tv)|.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} d_K(x) - d_K(x + tv) &\leq |z^*(x + tv) - x| - |z^*(x + tv) - (x + tv)| \\ &\leq |z^*(x + tv) - x - z^*(x + tv) + x + tv| = t|v| = t. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{d_K(x) - d_K(x + tv)}{t} \leq 1,$$

per ogni $t > 0$ sufficientemente piccolo e per ogni $|v| = 1$. Se x è un punto di differenziabilità per d_K allora si può dedurre che $-Dd_K(x) \cdot v \leq 1$ per ogni $|v| = 1$ e quindi

$$\sup_{|v|=1} [-Dd_K(x) \cdot v] \leq 1. \quad (3)$$

A questo punto scegliamo la direzione speciale $v^* = \frac{z^*(x) - x}{|z^*(x) - x|}$. Si verifica immediatamente che:

$$x + tv^* - z^*(x) = \frac{t - |z^* - x|}{|z^* - x|} (z^* - x),$$

da cui, preso $0 < t < d_K(x) = |z^*(x) - x|$, segue

$$|x + tv^* - z^*(x)| = |z^*(x) - x| - t,$$

e quindi

$$d_K(x) - d_K(x + tv^*) \geq t.$$

Dividendo la precedente disuguaglianza per $t > 0$ e passando poi al limite per $t \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$-Dd_K(x) \cdot v^* \geq 1. \quad (4)$$

Combinando la (3) con la (4) e ricordando la formula di rappresentazione duale della norma di un vettore p di \mathbb{R}^N

$$|p| = \sup_{|v|=1} p \cdot v,$$

si può concludere che in ogni punto di $\mathbb{R}^N \setminus K$ in cui la funzione d_K risulta differenziabile, è verificata la seguente *equazione eiconale*:

$$|Dd_K(x)| = 1. \quad (5)$$

Osserviamo che la funzione d_K è 1-Lipschitziana: infatti se $d_K(x) = |z^*(x) - x|$ allora $d_K(x') \leq |z^*(x) - x'|$ e quindi

$$d_K(x') - d_K(x) \leq |z^*(x) - x'| - |z^*(x) - x| \leq |x' - x|.$$

Dal Teorema di Rademacher segue che d_K , essendo lipschitziana, è differenziabile tranne al più in un insieme di misura di Lebesgue nulla e quindi l'equazione eiconale (5) risulta soddisfatta puntualmente quasi ovunque.

Osservazione 1. *Il risultato illustrato studiando la distanza euclidea vale a partire da una qualsiasi norma $\|\cdot\|$ definita su \mathbb{R}^N . In tale caso si avrà:*

$$\|Dd_K(x)\| = 1, \quad q.o. x \in \mathbb{R}^N,$$

con $\|\cdot\|$ norma duale relativa allo spazio $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$.

Esercizio 1. *Provare che, a partire da $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$, con*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^N x_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

si ottiene che la relativa distanza \tilde{d}_K soddisfa:

$$|D\tilde{d}_K(x)|_q = 1,$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.2 Il problema di tempo minimo.

In questo paragrafo consideriamo un problema fondamentale della teoria del controllo ottimo: quello della raggiungibilità di un insieme *bersaglio* in tempo minimo. Come vedremo si tratta in effetti di una versione più sofisticata di quello della distanza considerato nel paragrafo precedente. Descriviamo il problema in una formulazione che, pur non essendo la più generale possibile, presenta già le caratteristiche più significative del problema. Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\xi'(t) = \sigma(\xi(t)) c(t), t > 0. \quad (6)$$

dove $\sigma(\cdot)$ è una matrice $N \times M$, mentre c è una funzione misurabile di t a valori nella sfera unitaria di \mathbb{R}^M , detta funzione di *controllo*. Supponiamo che la funzione $y \mapsto \sigma(y)$ sia continua e che esista una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$(\sigma(y) - \sigma(y')) \cdot c \cdot (x - y) \leq L|x - y|^2, \quad (7)$$

per ogni $|c| \leq 1$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni funzione di controllo c esiste un'unica soluzione globale $\xi(t; x, c)$ dell'equazione (6) verificante la condizione iniziale

$$\xi(0; x, c) = x. \quad (8)$$

Osservazione 2. Se σ è lipschitziana, allora in particolare soddisfa (7).

Dato un insieme chiuso $K \subseteq \mathbb{R}^N$, con frontiera ∂K compatta, consideriamo il primo istante in cui la curva soluzione del problema di Cauchy (6), (8) entra nell'insieme bersaglio K :

$$t(x, c) = \begin{cases} \min\{t \geq 0 : \xi(t; x, c) \in K\}, & \text{se } \{t \geq 0 : \xi(t; x, c) \in K\} \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{se } \{t \geq 0 : \xi(t; x, c) \in K\} = \emptyset. \end{cases} \quad (9)$$

Definizione 1. Denotiamo con \mathcal{C} l'insieme di tutte le funzioni di controllo. Si dice *funzione tempo minimo* la funzione $T : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$, definita ponendo

$$T(x) = \inf_{c \in \mathcal{C}} t(x, c). \quad (10)$$

In questo momento non ci occuperemo dell'importante e delicata questione che riguarda la determinazione dell'*insieme raggiungibile*

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N : T(x) < +\infty\}$$

né quella della *completa controllabilità* (ovvero se $\mathcal{R} = \mathbb{R}^N$). Risultati in questa direzione saranno esaminati più avanti (Teorema di Chow-Hormander).

Per semplicità supponiamo dunque che la funzione T sia ben definita su tutto \mathbb{R}^N e deriviamo, nello spirito del paragrafo precedente, un'equazione alle derivate parziali del primo ordine per T .

Per ottenere ciò il punto di partenza è la seguente equazione funzionale, verificata dalla funzione tempo minimo :

$$T(x) = t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)), \quad (11)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ e per ogni $t \in [0, T(x)]$.

Cominciamo con il dimostrare che

$$T(x) \geq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)). \quad (12)$$

A questo scopo fissiamo $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ e $0 < t \leq T(x)$. Se c è un'arbitraria funzione di controllo, appartenente all'insieme \mathcal{C} , si verifica facilmente che vale la relazione

$$t(x, c) = t + t(\xi(t; x, c), \bar{c}),$$

dove \bar{c} è il controllo definito da $\bar{c}(s) := c(t + s)$. Quindi

$$t(x, c) \geq t + T(\xi(t; x, c)) \geq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)),$$

da cui, passando nuovamente all'estremo inferiore per $c \in \mathcal{C}$, segue la (12).

La verifica della disuguaglianza opposta è un pò più delicata. Fissiamo arbitrariamente $c \in \mathcal{C}$, $\epsilon > 0$ e $0 < t \leq T(x)$. Per definizione di $T(\xi(t; x, c))$ esiste $c^\epsilon \in \mathcal{C}$ tale che

$$\epsilon + T(\xi(t; x, c)) \geq t(\xi(t; x, c), c^\epsilon).$$

A questo punto si definisce un controllo

$$\bar{c}(s) = \begin{cases} c(s), & \text{se } s \leq t, \\ c^\epsilon(s-t), & \text{se } s > t. \end{cases} \quad (13)$$

Pertanto si ottiene

$$T(x) \leq t + t(\xi(t; x, c), \bar{c}) = t + t(\xi(t; x, c), c^\epsilon) \leq t + \epsilon + T(\xi(t; x, c)).$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, vale quindi

$$T(x) \leq t + T(\xi(t; x, c)),$$

da cui, passando all'inf. per $c \in \mathcal{C}$, segue

$$T(x) \leq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)). \quad (14)$$

Mettendo insieme la (12) e la (14) si ottiene infine l'identità (11) cercata.

Sia ora x un punto fissato in $\mathbb{R}^N \setminus K$ e si consideri la traiettoria $\xi(t; x, c)$, soluzione di (6), (8) corrispondente al controllo costante $c(t) \equiv c$. Dall'equazione (11) segue che

$$\frac{T(x) - T(\xi(t; x, c))}{t} \leq 1,$$

per ogni $t \in [0, T(x)]$.

Se x è un punto di differenziabilità per T allora, passando al limite per $t \rightarrow 0^+$ e sfruttando il fatto che $\xi(t; x, c)$ è soluzione di (6), (8), si ottiene

$$1 \geq -DT(x) \cdot \xi'(0; x, c) = -DT(x) \cdot \sigma(x) c.$$

Poichè questa disuguaglianza è valida per ogni controllo costante c , si può concludere che

$$\sup_{|c| \leq 1} [-DT(x) \cdot \sigma(x) c] \leq 1. \quad (15)$$

Dimostriamo che, se $T \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus K)$, si ha anche la disuguaglianza opposta

$$\sup_{|c| \leq 1} [-DT(x) \cdot \sigma(x) c] \geq 1. \quad (16)$$

Per provare ciò procediamo per assurdo e supponiamo quindi che la (16) sia falsa e quindi

$$-DT(x) \cdot \sigma(x) c < 1,$$

per ogni $|c| \leq 1$. Quindi, per la continuità di DT , dovrebbe esistere $\theta > 0$ tale che

$$-DT(y) \cdot \sigma(y) c \leq 1 - \theta, \quad (17)$$

per ogni $|c| \leq 1$ e per ogni $y \in U$, opportuno intorno aperto di x .

D'altra parte, dalla (11) segue che per ogni $t \in (0, T(x))$ fissato e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un controllo $c^\epsilon \in \mathcal{C}$ tale che

$$T(x) + \epsilon t \geq t + T(\xi(t; x, c^\epsilon))$$

e quindi

$$\frac{T(x) - T(\xi(t; x, c^\epsilon))}{t} \geq \frac{t - \epsilon t}{t}.$$

Poichè $T \in C^1$ possiamo riscrivere la precedente come:

$$1 - \epsilon \leq \frac{1}{t} \int_0^t -DT(\xi(s; x, c^\epsilon)) \cdot \sigma(\xi(s; x, c^\epsilon)) c^\epsilon(s) ds. \quad (18)$$

Per $t > 0$ sufficientemente piccolo, il punto $\xi(s; x, c^\epsilon) \in U$, per ogni $s \in [0, t]$, e quindi vale la (17). Pertanto per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$1 - \epsilon \leq \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \theta) ds = 1 - \theta,$$

il che si rivela assurdo non appena si sceglie $\epsilon < \theta$.

Abbiamo quindi dimostrato che vale la (16). Mettendo insieme la (15) e la (16) si può infine concludere che

$$\sup_{|c| \leq 1} [-DT(x) \cdot \sigma(x) c] = 1. \quad (19)$$

Abbiamo dunque trovato un'equazione alle derivate parziali del primo ordine per la funzione tempo minimo T .

Concludiamo il paragrafo osservando che, in particolare, se poniamo $\sigma = I_{N \times N}$ e consideriamo solo i controlli costanti, allora il problema di minimo tempo coincide con quello di minima distanza precedentemente illustrato.

2.3 Un problema di calcolo delle variazioni.

Fissato un numero $0 < T \leq +\infty$, per ogni $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ consideriamo l'insieme di curve

$$\mathcal{A}(t, x) = \{\xi \in Lip([0, T]; \mathbb{R}^N) \mid \xi(0) = x\}.$$

Siano $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni limitate inferiormente date e consideriamo il problema del calcolo delle variazioni che consiste nel minimizzare su $\mathcal{A}(t, x)$ il seguente funzionale (detto *funzionale costo*)

$$\int_0^t L(\xi(s), \xi'(s)) ds + g(\xi(t)). \quad (20)$$

Definizione 2. Si definisce funzione valore u la soluzione del problema di minimo del funzionale (20), ovvero:

$$u(t, x) := \inf_{\xi \in \mathcal{A}(t, x)} \int_0^t L(\xi(s), \xi'(s)) ds + g(\xi(t)). \quad (21)$$

La funzione valore u verifica la seguente equazione funzionale, nota come *principio di ottimalità di Bellman* oppure *principio della programmazione dinamica*, [1]

$$u(t, x) = \inf_{\xi \in \mathcal{A}(t, x)} \left[\int_{t'}^t L(\xi(s), \xi'(s)) ds + u(t', \xi(t')) \right], \quad (22)$$

per ogni $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ e per ogni $t' \in [0, t]$.

L'equazione (22) è l'analogo per il problema considerato in questo paragrafo della (11) per il problema del tempo minimo.

Dalla (22), procedendo in maniera analoga a quanto fatto nella sezione precedente (vedi [1] per i dettagli), si può dedurre che la funzione valore u verifica, in ogni punto $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$ in cui risulta differenziabile, la seguente equazione di evoluzione nonlineare del primo ordine:

$$u_t(t, x) + \sup_{q \in \mathbb{R}^N} [q \cdot Du(t, x) - L(x, q)] = 0. \quad (23)$$

Tale equazione prende il nome di *equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*. Osserviamo che l'hamiltoniana

$$H(x, p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^N} [q \cdot p - L(x, q)],$$

associata all'equazione (23), è convessa in quanto estremo superiore di una famiglia di funzioni affini della variabile p .

Dalla definizione di u segue inoltre in maniera ovvia che è verificata anche la condizione iniziale

$$u(0, x) = g(x). \quad (24)$$

2.4 La funzione di Hopf-Lax e la dualità convessa.

Torniamo adesso a considerare il problema di calcolo delle variazioni illustrato nella sezione precedente con l'obiettivo di mostrare che nel caso particolare in cui la funzione L risulti convessa e non dipenda dalla variabile x , allora la funzione valore u ammette una rappresentazione più semplice nella forma della funzione di Hopf-Lax. Useremo poi tale rappresentazione per derivare, sotto opportune ipotesi, l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (23).

Supponiamo quindi che:

1. $L(x, q) = L(q)$,
2. $q \mapsto L(q)$ sia convessa,
3. valga

$$\lim_{|q| \rightarrow +\infty} \frac{L(q)}{|q|} = +\infty, \quad (25)$$

4. g sia limitata inferiormente, e infine
5. g sia lipschitziana su tutto (\mathbb{R}^N) .

Definizione 3. *Definiamo funzione di Hopf-Lax la soluzione del seguente problema di minimo:*

$$v(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^N} \left[g(y) + tL \left(\frac{y-x}{t} \right) \right]. \quad (26)$$

Tale funzione può essere riscritta, mediante il cambio di variabile $y = x + tz$, come segue:

$$v(t, x) = \min_{z \in \mathbb{R}^N} [g(x + tz) + tL(z)]. \quad (27)$$

Notiamo che, sotto le ipotesi assunte, la funzione di Hopf-Lax è ben definita su tutto $(0, T) \times \mathbb{R}^N$.

E' interessante osservare che la funzione valore definita in (21), come estremo inferiore di un problema di minimizzazione su uno spazio di dimensione infinita $(\mathcal{A}(t, x))$, coincida con la funzione di Hopf-Lax definita tramite una operazione di minimizzazione in uno spazio finito dimensionale (\mathbb{R}^N) . Vediamo di giustificare in dettaglio tale affermazione.

Fissiamo $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^N$ e consideriamo

$$\xi(s) = x + \frac{s}{t}(y - x), \quad 0 \leq s \leq t.$$

È immediato osservare che il precedente segmento di retta appartiene a $\mathcal{A}(t, x)$ e quindi, per definizione di u , si ha

$$u(t, x) \leq \int_0^t L(\xi'(s)) ds + g(\xi(t)) = \int_0^t L \left(\frac{y-x}{t} \right) ds + g(y) = tL \left(\frac{y-x}{t} \right) + g(y).$$

Quindi, prendendo l'estremo inferiore rispetto a y si conclude che $u(t, x) \leq v(t, x)$.

Resta ora da provare la disuguaglianza opposta. A tale scopo fissiamo un qualsiasi $y \in \mathbb{R}^N$ e una curva $\xi \in \mathcal{A}(t, x)$ tale che $\xi(t) = y$. Si ha dunque:

$$\xi(t) - \xi(0) = y - x = \int_0^t \xi'(s) ds,$$

da cui, usando la disuguaglianza di convessità di Jensen, si ottiene

$$L \left(\frac{y-x}{t} \right) = L \left(\frac{1}{t} \int_0^t \xi'(s) ds \right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\xi'(s)) ds.$$

Quindi, per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ fissato, vale

$$tL\left(\frac{y-x}{t}\right) + g(y) \leq \int_0^t L(\xi'(s)) ds + g(\xi(t)),$$

da cui segue

$$v(t, x) \leq \int_0^t L(\xi'(s)) ds + g(\xi(t)).$$

Passando all'estremo inferiore per $\xi \in \mathcal{A}(t, x)$, infine si conclude che $v(t, x) \leq u(t, x)$.

Usando la rappresentazione mediante la funzione di Hopf-Lax (26) della funzione valore (21), si può dare una dimostrazione piuttosto semplice, nel caso particolare in cui le ipotesi assunte all'inizio di questa sezione siano verificate, del fatto che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (23) risulti verificata. Poichè in questo caso la funzione valore u coincide con la funzione di Hopf-Lax v , denotiamo per semplicità entrambe con u .

Teorema 1. *Supponiamo che valgano le ipotesi 1-5 e sia G_0 la costante di Lipschitz di g . Allora esiste una costante $G_1 > 0$ tale che*

$$|u(t', x') - u(t, x)| \leq G_0|x' - x| + G_1|t' - t|, \quad (28)$$

per ogni $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$. Inoltre, u è differenziabile quasi ovunque e verifica

$$u_t(t, x) + \sup_{q \in \mathbb{R}^N} [q \cdot Du(t, x) - L(q)] = 0 \quad (29)$$

in tutti i suoi punti di differenziabilità. Infine u verifica anche la condizione iniziale

$$u(0, x) = g(x). \quad (30)$$

Dimostrazione. Scegliendo $y = x$ nella definizione (26), si ottiene

$$\frac{u(t, x) - g(x)}{t} \leq L(0), \quad (31)$$

per ogni (t, x) con $t > 0$. Fissiamo (t, x) e (t', x') (per semplicità supponiamo $t' > t$) e scegliamo un punto di minimo $y^* = y^*(t, x)$ tale che

$$u(t, x) = g(y^*) + tL\left(\frac{y^* - x}{t}\right). \quad (32)$$

Dunque

$$u(t', x') - u(t, x) \leq g(y) + t'L\left(\frac{y - x'}{t'}\right) - g(y^*) - tL\left(\frac{y^* - x}{t}\right), \quad (33)$$

per ogni $y \in \mathbb{R}^N$. Scegliamo ora \hat{y} tale che

$$\frac{\hat{y} - x'}{t'} = \frac{y^* - x}{t},$$

ovvero

$$\hat{y} = x' + t'\frac{y^* - x}{t}.$$

Poichè g è lipschitziana, dalla (33) segue che

$$u(t', x') - u(t, x) \leq G_0|\hat{y} - y^*| + (t' - t)L\left(\frac{y^* - x}{t}\right). \quad (34)$$

A questo punto cerchiamo una stima per il termine $L\left(\frac{y^* - x}{t}\right)$. Sottraiamo e aggiungiamo $g(x)$ alla (32) e usiamo poi la lipschitzianeità di g e la (31) per ottenere la seguente stima:

$$L\left(\frac{y^* - x}{t}\right) = \frac{u(t, x) - g(x)}{t} + \frac{g(x) - g(y^*)}{t} \leq L(0) + G_0\frac{|x - y^*|}{t}.$$

L'ipotesi di sopralinearità (25), fatta su L , implica che, per $|q|$ sufficientemente grande, $L(q) \geq L(0) + G|q|$, per ogni costante G e quindi in particolare per $G = G_0$. Da tale osservazione si può dedurre che:

$$\left| \frac{y^* - x}{t} \right| \leq C, \quad (35)$$

per qualche $C > 0$ costante opportuna.

Quindi dalla (34), segue che

$$u(t', x') - u(t, x) \leq G_0 |\hat{y} - y^*| + (t' - t) \max_{|q| \leq C} L(q). \quad (36)$$

Infine, poichè $\hat{y} - y^* = x' - x + (t' - t) \frac{y^* - x}{t}$, vale

$$|\hat{y} - y^*| \leq |x' - x| + (t' - t) \left| \frac{y^* - x}{t} \right| \leq |x' - x| + C(t' - t). \quad (37)$$

Usando la (37) per maggiorare ulteriormente la (36), si ottiene

$$u(t', x') - u(t, x) \leq \left(G_0 C + \max_{|q| \leq C} L(q) \right) |t' - t| + G_0 |x' - x|$$

e quindi la prima parte dell'enunciato risulta provata.

Per il Teorema di Rademacher, la funzione u è differenziabile quasi ovunque in $(0, T) \times \mathbb{R}^N$.

Fissiamo un punto di differenziabilità (t, x) e verifichiamo la validità dell'equazione (115).

Sia $y^* = y^*(t, x)$ un punto di minimo definito dalla (32), allora, per ogni $x' \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $s \in (0, T)$, vale

$$u(t, x) - u(s, x') \geq g(y^*) + tL\left(\frac{y^* - x}{t}\right) - sL\left(\frac{y^* - x'}{s}\right) - g(y^*). \quad (38)$$

Fissato s , scegliamo ora $x' = x'_s$ in modo che $\frac{y^* - x}{t} = \frac{y^* - x'_s}{s}$ per ogni $s \in (0, t)$ e dunque

$$x'_s = y^* - \frac{s}{t}(y^* - x).$$

Sostituendo tale punto nella (38), otteniamo

$$u(t, x) - u\left(s, y^* - \frac{s}{t}(y^* - x)\right) \geq (t - s)L\left(\frac{y^* - x}{t}\right).$$

Dividendo per $t - s$ e prendendo il limite per $s \rightarrow t^+$ si ottiene

$$u_t(t, x) + \frac{y^* - x}{t} \cdot Du(t, x) - L\left(\frac{y^* - x}{t}\right) \geq 0.$$

Quindi, ponendo $q = \frac{y^* - x}{t}$ e passando al sup. per $q \in \mathbb{R}^N$:

$$u_t(t, x) + \sup_{q \in \mathbb{R}^N} [q \cdot Du(t, x) - L(q)] \geq 0.$$

Rimane da verificare la disuguaglianza opposta. Consideriamo nuovamente $y^* = y^*(t, x)$, definito dalla (32).

Fissato $q \in \mathbb{R}^N$ e $s > 0$ si ha:

$$u(t + s, x - sq) - u(t, x) \leq (t + s)L\left(\frac{y^* - x + sq}{t + s}\right) - tL\left(\frac{y^* - x}{t}\right). \quad (39)$$

A questo punto usiamo l'ipotesi di convessità fatta su L e quindi

$$L\left(\frac{y^* - x + sq}{t + s}\right) \leq \frac{t}{t + s}L\left(\frac{y^* - x}{t}\right) + \frac{s}{t + s}L(q),$$

e quindi la (39) diventa:

$$u(t+s, x-sq) - u(t, x) \leq sL(q).$$

Dividendo per s e, mandando $s \rightarrow 0^+$, si conclude, analogamente a quanto fatto prima, che

$$u_t(t, x) + q \cdot Du(t, x) - L(q) \leq 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $q \in \mathbb{R}^N$, segue

$$u_t(t, x) + \sup_{q \in \mathbb{R}^N} [q \cdot Du(t, x) - L(q)] \leq 0.$$

□

Osservazione 3. Il risultato appena provato, che ci assicura che la funzione di Hopf-Lax v è soluzione del problema di Cauchy (115), (30), ha anche un aspetto duale. Infatti se $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ verificano le ipotesi 1-5, si ha che la funzione v si può anche esprimere come:

$$v(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^N} \left[g(y) + tH^* \left(\frac{y-x}{t} \right) \right], \quad (40)$$

dove $H^*(q) := \sup_{p \in \mathbb{R}^N} [p \cdot q - H(p)]$ è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v_t(t, x) + H(Dv(t, x)) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ v(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (41)$$

La funzione H^* è la trasformata di Legendre di H . L'affermazione precedente segue dal Teorema 1, dopo aver osservato che per le ipotesi fatte su H , allora H^* risulta involutiva (i.e. $(H^*)^* = H$) e inoltre soddisfa (25). Per i dettagli della dimostrazione vedi [8].

Osserviamo che in generale se H non è convessa $(H^*)^* \neq H$; in realtà $(H^*)^*$ coincide con la regolarizzata convessa di H e quindi è ovvio che nel caso in cui si parta da una funzione convessa (e solo in quello) ci restituisce la funzione stessa.

Osservazione 4. Un punto importante su cui soffermarsi è che la funzione di Hopf-Lax fornisce una soluzione del problema di Cauchy (115), (30) come funzione valore di un problema di ottimizzazione finito dimensionale.

Osservazione 5. In generale la funzione di Hopf-Lax anche quando è costruita a partire da g e L molto regolari non è in differenziabile ovunque. Diamo un esempio unidimensionale ($N = 1$) di questo fatto.

Sia $L(q) = \frac{q^2}{2}$ e

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } |x| < 1, \\ 1 - 2|x|, & \text{se } |x| > 1. \end{cases} \quad (42)$$

Si nota subito che $L, g \in C^1$. La funzione di Hopf-Lax relativa al problema (42) si costruisce facilmente

$$v(t, x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{1-2t}, & \text{se } t < \frac{1}{2} \text{ e } |x| < 1-2t, \\ 1 - 2(|x| + t), & \text{se } |x| > 1-2t \text{ oppure se } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (43)$$

Tale funzione v non è differenziabile nei punti $(t, 0)$ con $t \geq \frac{1}{2}$.

Osservazione 6. Una maniera alternativa per ricavare la funzione di Hopf-Lax senza passare attraverso il problema variazionale (21), è dato dall'idea originale di Hopf ([9]). Si parte dalla semplice osservazione che per un dato iniziale affine $g(x) = q \cdot x + c$, una soluzione regolare del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = q \cdot x + c & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (44)$$

è data da

$$v(x, t) = g(x) - tH(Dg(x)). \quad (45)$$

Si può inoltre osservare che, per un generico dato g , le funzioni affini $v^{y,q}(x, t) = g(y) + q \cdot (x - y) - tH(q)$ sono soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi (45), per ogni scelta di $(y, q) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ma, in generale, non soddisfano la condizione iniziale. La procedura proposta da Hopf per completare la costruzione di una soluzione significativa del problema di Cauchy è quella di considerare l'involuppo

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^N} \sup_{q \in \mathbb{R}^N} v^{y,q}(x, t)$$

della famiglia $v^{y,q}$. È facile verificare che

$$\sup_{q \in \mathbb{R}^N} v^{y,q}(x, t) = g(y) + tH^* \left(\frac{x - y}{t} \right)$$

e che quindi la funzione involuppo coincide in effetti con la funzione v definita in (26).

Osservazione 7. Il problema di Cauchy (115), (30) ha in generale molte soluzioni quasi ovunque. Consideriamo, per esempio, il caso unidimensionale:

$$\begin{cases} u_t(t, x) + u_x^2 = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (46)$$

La funzione di Hopf-Lax è $u \equiv 0$ ed è una soluzione regolare. Osserviamo tuttavia che le funzioni lipschitziane

$$u_a(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > at \\ a|x| - a^2t, & \text{se } |x| < at \end{cases} \quad (47)$$

sono soluzioni quasi ovunque per ogni $a > 0$. Per ottenere unicità di soluzioni occorre dunque introdurre un criterio di selezione supplementare. La nozione di soluzione viscosità, che vedremo nel prossimo capitolo, sarà una risposta in tale senso.

2.5 Funzione di Hopf-Lax, convoluzione ed equazione del calore.

Una procedura di regolarizzazione ben nota in analisi convessa è quella di *inf-convoluzione*, nota anche sotto il nome di regolarizzazione di Yosida, in teoria dei semigrupp, e di regolarizzazione di Moreau, in ottimizzazione.

Definizione 4. Sia $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e $t > 0$, la sua *inf-convoluzione* (di parametro di scala t) è la funzione $g_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$g_t(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left[g(y) + \frac{|x - y|^2}{2t} \right]. \quad (48)$$

Vediamo alcune proprietà dell'inf-convoluzione:

- (i) $g_t(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,
- (ii) $g_t(x) \uparrow g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, per $t \rightarrow 0^+$,
- (iii) g_t è monotona crescente in t ,

(iv) se g è continua, allora $g_t \uparrow g$ uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^N (tale risultato segue dal fatto che la convergenza puntuale a una funzione continua e la monotonia implicano sempre la convergenza uniforme sui compatti),

(v) inoltre, la funzione g_t è più regolare di g . Vale infatti la seguente stima di semiconcavità:

$$g_t(x+h) - 2g_t(x) + g_t(x-h) \leq \frac{1}{t}|h|^2, \quad (49)$$

per ogni $x, h \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$.

La precedente stima implica in particolare la lipschitzianità locale di g_t rispetto alla variabile x e quindi la sua differenziabilità q.o. in tutto \mathbb{R}^N .

Dimostrazione. Dimostriamo la (49). Scegliamo $y^* \in \mathbb{R}^N$ in modo che $g_t(x) = g(y^*) + \frac{|x-y^*|^2}{2t}$, allora dalla definizione di g_t segue che

$$g_t(x+h) - 2g_t(x) + g_t(x-h) \leq \frac{1}{2t} [|x+h-y^*|^2 - 2|x-y^*|^2 + |x-h-y^*|^2] = \frac{1}{2t}|h|^2.$$

□

Per approfondimenti sulle proprietà delle funzioni semiconcave si può vedere [4].

Osservazione 8. È immediato notare che la proprietà (v) implica che $\Delta g_t \leq \frac{1}{t}$, nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 2. Dare la definizione di inf-convoluzione in un generico spazio metrico (X, d) e studiarne le proprietà.

Osserviamo che g_t , vista come funzione di $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$, è in realtà la funzione di Hopf-Lax relativa ai dati g e $L(p) = \frac{1}{2}|p|^2$ e quindi, per quanto visto in precedenza, $u(t, x) := g_t(x)$ è soluzione quasi ovunque dell'equazione

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}|Du|^2 = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (50)$$

C'è una relazione interessante e non immediatamente riconoscibile tra la inf-convoluzione e la classica operazione di convoluzione integrale. Per illustrare ciò dobbiamo innanzi tutto richiamare brevemente alcuni fatti basilari sull'equazione del calore

$$w_t - \Delta w = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \quad (51)$$

vedi [8] per maggiori dettagli.

La funzione Γ definita su $(-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^N$, da

$$\Gamma(t, x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0, \end{cases} \quad (52)$$

è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore (51). La funzione Γ verifica l'equazione del calore con condizione iniziale $\Gamma(0, x) = \delta_0$, (dove con δ_0 indichiamo la misura di Dirac concentrata in 0). Usando Γ come nucleo di convoluzione si dimostra che la funzione w , definita per $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$, da

$$w(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t, x-y)g(y)dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy,$$

è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore (51) con dato iniziale $g(x)$. Più precisamente, se $g \in BC(\mathbb{R}^N)$ allora $w \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$ e verifica

$$\begin{cases} w_t(t, x) - \Delta w(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ \lim_{(t,y) \rightarrow (0,x)} w(t, y) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (53)$$

Consideriamo ora la regolarizzazione parabolica del problema (50), data da:

$$\begin{cases} u_t^\epsilon - \epsilon \Delta u^\epsilon + \frac{1}{2} |Du^\epsilon|^2 = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u^\epsilon(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (54)$$

dove $\epsilon > 0$ è un parametro. Un semplice calcolo mostra che, se u^ϵ è una soluzione regolare del problema (54), allora la sua trasformata di Hopf-Cole

$$w^\epsilon = e^{-\frac{u^\epsilon}{2\epsilon}}$$

risolve il seguente problema di Cauchy per l'equazione del calore:

$$\begin{cases} w_t^\epsilon - \epsilon \Delta w^\epsilon = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ w^\epsilon(x, 0) = e^{-\frac{g(x)}{2\epsilon}}, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (55)$$

Osserviamo che, mentre il problema (54) è non lineare, il problema a cui ci siamo ricondotti è associato all'equazione del calore, che è un'equazione tipicamente lineare.

Per quanto ricordato sopra, la soluzione w^ϵ di (55) può essere espressa come

$$w^\epsilon(x, t) = (4\pi\epsilon t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon t}} e^{-\frac{g(x)}{2\epsilon}} dy. \quad (56)$$

Quindi, applicando l'antitrasformata di Hopf-Cole, si ricava la seguente espressione per la soluzione del problema (57)

$$u^\epsilon(x, t) = -2\epsilon \log \left((4\pi\epsilon t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon t}} e^{-\frac{g(x)}{2\epsilon}} dy \right). \quad (57)$$

È naturale immaginare che le soluzioni u^ϵ di (54) convergano per $\epsilon \rightarrow 0^+$ alla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2} |Du|^2 = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (58)$$

e quindi alla relativa funzione di Hopf-Lax

$$u(t, x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left[g(y) + \frac{|x-y|^2}{2t} \right]. \quad (59)$$

In effetti vale il seguente risultato che mostra come la inf-convoluzione (48) possa essere interpretata come limite singolare (a meno di un riscalamento logaritmico) della convoluzione integrale con nucleo gaussiano dato da $\Gamma(x) = (4\pi\epsilon t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon t}}$.

Teorema 2. *Supponiamo che g sia limitata e continua su \mathbb{R}^N . Allora, per ogni $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$, si ha*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -2\epsilon \log \left((4\pi\epsilon t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon t}} e^{-\frac{g(x)}{2\epsilon}} dy \right) \right\} = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left[g(y) + \frac{|x-y|^2}{2t} \right]. \quad (60)$$

La dimostrazione di tale fatto deriva dal seguente risultato generale, noto come *Principio delle Grandi Deviazioni di S.N. Varadhan* (vedi [12]).

Teorema 3. Sia (X, d) uno spazio metrico e $I : X \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione semicontinua su X non identicamente $+\infty$, tale che

$$I_c =: \{x \in X : I(x) \leq c\} \text{ è compatto per ogni } c \in [0, +\infty). \quad (61)$$

Sia $\{\mathbb{P}_n\}$ una famiglia di misure di probabilità su X , tale che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (\mathbb{P}_n(C)) \leq - \inf_{x \in C} I(x), \quad \text{per ogni chiuso } C \subseteq X,$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (\mathbb{P}_n(A)) \geq - \inf_{x \in A} I(x), \quad \text{per ogni aperto } A \subseteq X,$$

allora, per ogni $F \in C(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \int_X e^{nF(x)} d\mathbb{P}_n = \sup_{x \in X} [F(x) - I(x)]. \quad (62)$$

Per dimostrare il Teorema 2 andiamo a considerare la famiglia di misure di probabilità $\mathbb{P}_n^{x,t}$, definite sui boreliani B di \mathbb{R}^N , da

$$\mathbb{P}_n^{x,t}(B) = \left(\frac{4\pi t}{n}\right)^{-\frac{N}{2}} \int_B e^{-\frac{n|x-y|^2}{4t}} dy$$

e la funzione

$$I^{x,t}(y) = \frac{|x-y|^2}{4t}.$$

Infatti per ogni (t, x) la famiglia di misure $\mathbb{P}_n^{x,t}$ e la funzione $I^{x,t}$ verificano le ipotesi del Teorema 3 (vedi [11] per tale dimostrazione e [5] per dettagli sull'interpretazione del risultato di Varadhan qui presentata). Scegliendo $F = -\frac{g}{2}$ nella (62) si può quindi concludere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{g(y)}{2}} \frac{1}{n} d\mathbb{P}_n^{x,t}(y) \right) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[-\frac{g(y)}{2} - \frac{|x-y|^2}{4t} \right],$$

da cui segue facilmente la tesi.

Osservazione 9. Dalla teoria delle equazioni paraboliche si sa che l'equazione del calore ha un forte ed immediato effetto regolarizzante, nel senso che la soluzione di (51) con dato iniziale $g \in BC(\mathbb{R}^N)$ è di classe $C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$. La regolarizzazione per inf-convoluzione che, come abbiamo visto può essere interpretata come un limite singolare per $\epsilon \rightarrow 0^+$ della regolarizzazione per convoluzione integrale con nucleo gaussiano, conserva anch'essa una molto più debole proprietà regolarizzante, quella di semiconcavità vista in (49).

Osservazione 10. La trasformata di Hopf-Cole può essere usata anche per la regolarizzazione parabolica di equazioni di Hamilton-Jacobi più generali, del tipo

$$u_t + \frac{1}{2} |\sigma(x) Du|^2 = 0,$$

dove σ è una matrice $M \times N$. In questo caso si considera l'equazione del secondo ordine

$$u_t^\epsilon - \epsilon \operatorname{div}(\sigma^*(x)\sigma(x)Du^\epsilon) + \frac{1}{2} |\sigma(x)Du^\epsilon|^2 = 0.$$

La trasformata di Hopf-Cole relativa, $w^\epsilon = e^{-\frac{u^\epsilon}{2\epsilon}}$, risolve l'equazione lineare

$$w_t^\epsilon - \epsilon \operatorname{div}(\sigma^*(x)\sigma(x)Dw^\epsilon) = 0.$$

I calcoli necessari a tale verifica sono molto semplici e li lasciamo quindi come esercizio.

Concludiamo questo paragrafo mettendo in evidenza in maniera puramente formale un altro legame significativo tra equazioni paraboliche ed equazioni di Hamilton-Jacobi.

Consideriamo per semplicità l'equazione del calore

$$w_t - \Delta w = 0 \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N. \quad (63)$$

Cerchiamo soluzioni di (63) del tipo

$$w(t, x) = \frac{e^{-u(t, x)}}{t^\gamma}$$

con γ parametro positivo. Si tratta dunque di cercare, in particolare, soluzioni positive e singolari in $t = 0$. Quindi, si ha

$$w_t = e^{-u} \left(\frac{-u_t}{t^\gamma} - \frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \right) \quad \text{e} \quad \Delta w = \frac{e^{-u}}{t^\gamma} (|Du|^2 - \Delta u).$$

Poichè w deve essere soluzione di (63), allora necessariamente

$$\frac{-e^{-u}}{t^\gamma} \left(u_t + |Du|^2 - \Delta u + \frac{\gamma}{t} \right) = 0. \quad (64)$$

Si tratta a questo punto di determinare u e γ in modo che (64) sia verificata.

Una modo per ottenere ciò, è quello di cercare una soluzione di

$$u_t + |Du|^2 = 0, \quad (65)$$

con il dato iniziale singolare:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ +\infty, & \text{se } x \neq 0. \end{cases} \quad (66)$$

Usando la funzione di Hopf-Lax in maniera puramente formale (le ipotesi considerate in precedenza ovviamente non sono soddisfatte) per scrivere la soluzione, si ottiene

$$u(t, x) = \frac{|x|^2}{2t}$$

e quindi $\Delta u = \frac{N}{2t}$.

Dunque una soluzione di (65) è data da

$$u(t, x) = \frac{|x|^2}{2t}, \quad \text{con } \gamma = \frac{N}{2}.$$

Quindi la funzione

$$w(t, x) = t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

verifica (63) in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$. Inoltre, dato che cw è soluzione di (63) per ogni c , si può determinare c in modo che $\int_{\mathbb{R}^N} cw(t, x) dx = 1$.

Un semplice calcolo mostra che la soluzione normalizzata $(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ trovata in questo modo, è esattamente la soluzione fondamentale Γ dell'equazione del calore, data in (52).

2.6 Moto di fronti secondo velocità normale.

Sia $(\Gamma_t)_{t \in [0, T]}$ una famiglia di ipersuperfici regolari in \mathbb{R}^N (dette *fronti*). La velocità normale $V(t, x)$ di un punto $x \in \Gamma_t$ è definita da:

$$V(t, x) = n(t, x) \cdot X'(t),$$

dove $X : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare tale che $X(t) = x$ e $X(s) \in \Gamma_s$ per ogni $s \in [0, T)$ e $n(t, x)$ è il versore normale esterno a Γ_t nel punto x . Supponiamo che la famiglia $(\Gamma_t)_t$ evolva a partire dalla configurazione iniziale Γ_0 con velocità normale prescritta

$$V(t, x) := v(t, x, n(t, x)), \quad \forall x \in \Gamma_t, \quad t \in [0, T), \quad (67)$$

dove v è una funzione data, definita su $[0, T) \times \mathbb{R}^N \times S^1$.

Supponiamo che Γ_t sia la frontiera di un aperto $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^N$ per ogni $t \in [0, T)$ e che esista una funzione regolare $u : [0, T) \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^N : u(t, x) > 0\}, \quad \Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : u(t, x) = 0\}$$

e infine che $Du(t, x) \neq 0$ su Γ_t . Ne segue che

$$n(t, x) = \frac{-Du(t, x)}{|Du(t, x)|}.$$

Allora, se $X : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare tale che $X(t) \in \Gamma_t$ per ogni $t \in [0, T)$, si ha $u(t, X(t)) \equiv t$ e quindi, differenziando rispetto a t ,

$$0 = u_t(t, x) + Du(t, x) \cdot X'(t) = u_t(t, x) - |Du(t, x)|n(t, x) \cdot X'(t).$$

Si ottiene allora la seguente relazione tra la velocità di propagazione V del fronte Γ_t e la funzione u di cui Γ_t è l'insieme di livello 0

$$V(t, x) = \frac{u_t(t, x)}{|Du(t, x)|}, \quad \forall x \in \Gamma_t.$$

Inserendo ciò nella legge di evoluzione (67) si deduce che u è soluzione dell'equazione alle derivate parziali di tipo Hamilton-Jacobi

$$u_t - v\left(t, x, \frac{-Du}{|Du|}\right) |Du| = 0. \quad (68)$$

È importante notare che questa equazione è, in generale, di tipo singolare in quanto il coefficiente v non è definito nei punti (t, x) in cui $Du(t, x) = 0$.

Esempi specifici interessanti corrispondono alle scelte $v(t, x, q) = -c(x)$ e $v(t, x, q) = -|\sigma(x)q|$ dove σ è una matrice $M \times N$. Nel primo caso l'equazione (68) diventa

$$u_t + c(x)|Du| = 0$$

mentre nel secondo si ha

$$u_t + |\sigma(x)Du| = 0.$$

In generale, si hanno equazioni della forma

$$u_t + H(t, x, Du) = 0$$

con $H : (0, T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$H(t, x, p) = -|p|v\left(t, x, -\frac{p}{|p|}\right).$$

Osserviamo che tali funzioni H sono positivamente omogenee rispetto alla variabile p e cioè tali che

$$H(t, x, p) = H(t, x, \lambda p) \quad \forall \lambda > 0.$$

3 Soluzioni classiche: il metodo delle caratteristiche.

In questo paragrafo applicheremo il classico metodo delle caratteristiche per costruire la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (69)$$

In tutto questo paragrafo supporremo che i dati H e g siano funzioni regolari.

Il primo passo nell'implementazione del metodo è (vedi per esempio [8]) quello di associare all'equazione alle derivate parziali (69) il sistema Hamiltoniano di $2N$ equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D_p H(x(t), p(t)), \\ \dot{p}(t) = -D_x H(x(t), p(t)). \end{cases} \quad (70)$$

Ci limitiamo per semplicità a considerare adesso il caso $H = H(p)$. In questo caso il sistema (70) si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D_p H(p(t)), \\ \dot{p}(t) = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Mostriamo come la soluzione di (71), completata con opportuni dati iniziali, produca una soluzione di (69). La soluzione di (71) che verifica $x(0) = x$, con x arbitrario in \mathbb{R}^N , e $p(0) = Dg(x)$ è ovviamente

$$x(t) = x + tDH(Dg(x)), \quad p(t) = Dg(x).$$

Consideriamo ora l'applicazione $X : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, definita da

$$X(t, x) = x + tDH(Dg(x)). \quad (72)$$

Vale il seguente risultato.

Lemma 1. *Siano $H \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste $T > 0$ tale che X è un diffeomorfismo di classe C^1 su \mathbb{R}^N per ogni $t \in [0, T]$. Inoltre, denotando rispettivamente con X_x e X_x^{-1} le matrici Jacobiane di X e della sua inversa X^{-1} e con X_t , X_t^{-1} le derivate rispetto alla variabile t , si ha che X^{-1} è di classe C^1 e valgono le relazioni:*

$$X_x(X^{-1})_x = I, \quad X_x(X^{-1})_t + X_t = 0 \quad (73)$$

in tutti i punti $(t, X^{-1}(t, x))$ e per ogni $t \in (0, T)$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. La matrice Jacobiana di X è

$$X_x(t, x) = I + tD^2H(Dg(x))D^2g(x) \quad (74)$$

Dunque $\det X_x(0, x) = 1$ e quindi per continuità esisterà $T > 0$ tale che $\det X_x(t, x) > 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Dal Teorema della Funzione Inversa segue pertanto la prima parte della tesi. Le relazioni in (73) si deducono facilmente dalla identità

$$X(t, X^{-1}(t, x)) = x$$

e dalla regola di derivazione di funzioni composte.

□

Il prossimo enunciato contiene un risultato di esistenza ed una formula di rappresentazione di una soluzione classica del problema di Cauchy (69).

Teorema 4. Siano $H \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste $T > 0$ tale che la funzione

$$u(t, x) = g(X^{-1}(t, x)) + t [DH(Dg(X^{-1}(t, x))) \cdot Dg(X^{-1}(t, x)) - H(Dg(X^{-1}(t, x)))] \quad (75)$$

è ben definita su $[0, T] \times \mathbb{R}^N$.

Inoltre, $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ e risolve il problema di Cauchy (69).

Osservazione 11. Quindi abbiamo ricondotto il problema a calcolare l'applicazione inversa X^{-1} .

Dimostrazione. Dalla definizione (75) di u e dal Lemma 1 segue immediatamente che $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$; inoltre, essendo $X^{-1}(0, x) = x$, si verifica subito che $u(0, x) = g(x)$.

Calcoliamo ora $Du(t, x)$ e $u_t(t, x)$. Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte all'espressione (75) si ottiene

$$Du = [Dg + tD^2H(Dg)DgD^2g + tDH(Dg)D^2g - tDH(Dg)D^2g] (X^{-1})_x$$

dove i vettori e le matrici a secondo membro si intendono tutti calcolati nel punto $(X^{-1})_x(t, x)$. Quindi

$$Du(t, x) = [I + tD^2H(Dg)D^2g] (X^{-1})_x Dg.$$

Dato che la matrice in parentesi quadra a secondo membro è X_x , dalla prima relazione nel Lemma 1 segue che

$$Du(t, x) = Dg((X^{-1})_x(t, x)). \quad (76)$$

Con procedimento analogo si calcola

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= (X^{-1})_t \cdot Dg + DH(Dg) \cdot Dg - H(Dg) + \\ &+ t (X^{-1})_t \cdot [D^2H(Dg)D^2gDg + DH(Dg)D^2g - DH(Dg)D^2g] \end{aligned}$$

dove i vettori e le matrici a secondo membro si intendono ancora tutti calcolati nel punto $(X^{-1})_x(t, x)$. Dunque, semplificando opportunamente i termini, si ottiene

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= [I + tD^2H(Dg)D^2g] (X^{-1})_t \cdot Dg + DH(Dg) \cdot Dg - H(Dg) = \\ &= X_x (X^{-1})_t \cdot Dg + DH(Dg) \cdot Dg - H(Dg). \end{aligned}$$

La seconda relazione nel Lemma 1 dice che $(X^{-1})_t = -(X^{-1})_x X_t$ ovvero che $X_x (X^{-1})_t = -X_t$. Usando questa nella formula trovata per u_t si conclude, ricordando che $X_t = DH(Dg)$, che

$$u_t(t, x) = -H(Dg((X^{-1})_x(t, x))). \quad (77)$$

Combinando (76) e (77) si conclude che

$$u_t(t, x) + H(Du(t, x)) = -H(Dg((X^{-1})_x(t, x))) + H(Dg((X^{-1})_x(t, x))) \equiv 0.$$

□

Il fatto che l'applicazione $X(t, x)$ sia un diffeomorfismo locale per ogni tempo positivo non è di per sé sufficiente ad ottenere l'esistenza di soluzioni globali. Perchè ciò accada servono proprietà ulteriori sui dati del problema.

Osservazione 12 (Esistenza di soluzioni globali).

Vediamo alcuni casi in cui l'applicazione $X(t, x)$ è un diffeomorfismo globale per ogni $t \geq 0$.

Se H e g sono funzioni convesse allora esistono soluzioni globali. Infatti in tale caso $D^2H(p)$ e $D^2g(x)$

sono matrici simmetriche semidefinite positive per ogni p e x . Ne segue che gli autovalori $\lambda_i(x)$ della matrice $D^2H(Dg(x))D^2g(x)$ sono reali e nonnegativi per ogni x . Di conseguenza (vedi (74)) gli autovalori di $X_x(t, x)$, che sono dati da $1 + t\lambda_i(x)$, per ogni $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$, risultano sempre maggiori o uguali a 1 e quindi $\det X_x(t, x) \geq 1 > 0$. In questo caso l'applicazione X è un diffeomorfismo globale in $[0, +\infty)$.

Un caso differente in cui l'applicazione $X(t, x)$ è un diffeomorfismo per ogni $t \in [0, +\infty)$ è quello in cui il dato iniziale g è una funzione affine, i.e.

$$g(x) = A \cdot x + c,$$

dove A e c sono, rispettivamente, un vettore in \mathbb{R}^N ed un numero reale, fissati. In questo caso $X(t, x) = x + tDH(A)$ e quindi $\det X_x(t, x) \equiv 1$ per ogni $t \geq 0$.

Osservazione 13 (Esempi in cui non esistono soluzioni classiche globali).

Intuitivamente si può affermare che in generale se le linee caratteristiche danno luogo a un insieme di rette tra loro parallele in generale si riesce a invertire la funzione ovunque e quindi a determinare una soluzione classica globale mediante l'applicazione del metodo delle caratteristiche.

Se invece le linee caratteristiche danno luogo a punti di intersezioni diventa impossibile invertire globalmente la funzione poichè in quei punti la retroimmagine è costituita da più punti distinti.

In quest'ottica il tempo T può anche essere interpretato come il più grande tempo per cui le linee caratteristiche non presentano punti di intersezione.

In tali casi è quindi ovvio che non esistono soluzioni classiche globali perchè in corrispondenza dei punti di intersezione di due caratteristiche la soluzione presenta delle discontinuità (caustiche in ottica geometrica, shock nel linguaggio proprio della teoria delle piccole oscillazioni).

Esempio 1 (Calcolo esplicito di una soluzione globale nel caso in cui H e g sono convesse).

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(0, x) = \frac{1}{2}x^2, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Si ha immediatamente che

$$X(t, x) = (1 + t)x,$$

per cui

$$X_x = 1 + t \geq 1 > 0.$$

Quindi si calcola esplicitamente l'inversa X^{-1}

$$X^{-1}(t, x) = \frac{x}{1 + t},$$

che risulta ben definita ed è un diffeomorfismo per ogni $t \geq 0$.

Pertanto abbiamo trovato la seguente soluzione classica globale

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{(1 + t)^2}.$$

Esempio 2 (Shock).

Mettiamoci adesso nel caso in cui invece uno dei due dati è convesso mentre l'altro è concavo. In particolare consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}(u_x)^2, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(0, x) = \frac{1}{2}x^2, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

In questo caso $X(t, x) = (1 - t)x$. Pertanto $X_x = 1 - t$ e quindi l'inversa è data da

$$X^{-1}(t, x) = \frac{x}{1 - t}.$$

Tale funzione è un diffeomorfismo in $[0, 1)$ ma non è definita in $t = 1$. La soluzione corrispondente quindi è una soluzione classica locale che esplose in tempi finiti, infatti

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} u(t, x) = +\infty.$$

4 Soluzioni viscosità.

4.1 Definizioni e proprietà elementari.

L'esempio illustrato alla fine del paragrafo precedente mostra come in alcuni casi la soluzione classica determinata non si possa vedere come soluzione globale in quanto presenta singolarità in tempi finiti.

Un altro esempio che mostra la necessità di una nuova nozione di soluzione che generalizzi quella classica, è dato dallo studio del seguente problema di Dirichlet scalare:

$$\begin{cases} |\dot{u}(x)| = 1, & \forall x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (78)$$

Dal Teorema di Rolle segue immediatamente che non esiste nessuna funzione $C^1(-1, 1)$ che verifica l'equazione $|\dot{u}(x)| = 1$ in ogni punto e quindi non esiste una soluzione classica del problema.

Si costruiscono immediatamente delle funzioni continue che soddisfano il problema (78), tranne in un numero finito di punti in cui non ammettano derivata. La più immediata di tali funzioni è $u(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$, dove poniamo $\Omega := (-1, 1)$ e ovviamente la sua opposta $v(x) := -u(x)$.

In realtà di funzioni continue e differenziabili tranne in un numero finito di punti (e quindi in particolare quasi ovunque) che verificano il problema (78) in ogni punto di differenziabilità ne esiste un'infinità numerabile. Tali funzioni "a dente di sega", ottenute mediante l'unione di tratti di traslate delle funzioni u e v sopra definite, prendono il nome di *funzioni di Rademacher* (le vedremo più in dettaglio in seguito). Esse dimostrano come la differenziabilità quasi ovunque dia luogo a una nozione di soluzione (*soluzione generalizzata*, introdotta da Hopf negli anni '60) che, per quanto immediata, ha come primo grande limite la non unicità.

Sorge quindi la necessità di trovare un nozione di soluzione che mi fornisca in un certo senso un criterio di selezione univoco nell'insieme delle soluzioni generalizzate elencate sopra.

Una buona nozione di soluzione deve infatti in generale avere non solo proprietà di esistenza ma anche di unicità e di stabilità rispetto a piccole perturbazioni del problema.

Osservazione 14. *Un'altra nozione di soluzione è quella di soluzione nel senso delle distribuzioni.*

Tale nozione soddisfa buone proprietà di esistenza, unicità e stabilità ma non è applicabile all'interno della nostra teoria in quanto la sua natura di media integrale fa sì che risulti applicabile in sostanza solo a equazioni lineari almeno nelle derivate di ordine massimo.

La nozione che risponderà alle nostre esigenze sarà quella di soluzione viscosità che ci apprestiamo ora a definire.

Definizione 5. *Siano Ω aperto di \mathbb{R}^N , $u \in USC(\Omega)$ e $\phi \in C^1(\Omega)$. Sia inoltre x un punto arbitrario di Ω . La funzione ϕ è detta sopratangente alla funzione semicontinua superiormente u in x se:*

$$u(x) = \phi(x) \quad , \quad u(y) \leq \phi(y) \quad \text{in un intorno di } x.$$

Simmetricamente, data $u \in LSC(\Omega)$, $\psi \in C^1(\Omega)$ si dice sottotangente alla funzione semicontinua inferiormente u in x se

$$u(x) = \psi(x) \quad , \quad u(y) \geq \psi(y) \quad \text{in un intorno di } x.$$

Denotiamo con $T_{u,x}^+$ e con $T_{u,x}^-$ rispettivamente l'insieme delle sopratangenti e delle sottotangenti a u in x . Consideriamo quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$F(x, u, Du) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (79)$$

dove F è una funzione scalare delle variabili $(x, r, p) \in \mathbb{R}^{2N+1}$.

Definizione 6. Una funzione $u \in SCS(\Omega)$ è sottosoluzione viscosità di (79) se, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\phi \in T_{u,x}^+(\Omega)$, si ha

$$F(x, u(x), D\phi(x)) \leq 0. \quad (80)$$

Analogamente, una funzione $u \in SCI(\Omega)$ è soprasoluzione viscosità di (79) se, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\psi \in T_{u,x}^-(\Omega)$, si ha

$$F(x, u(x), D\psi(x)) \geq 0. \quad (81)$$

Se $u \in C(\Omega)$ è contemporaneamente sottosoluzione e soprasoluzione viscosità allora si dice che u è soluzione viscosità di (79).

Riferimenti generali per la teoria delle soluzioni viscosità sono ad esempio [1, 2, 8, 10]. È facile convincersi che il caso dell'equazione di evoluzione

$$u_t + H(t, y, u, Du) = 0 \quad (82)$$

è compreso nelle definizioni data sopra.

Esplicitamente si può scrivere che $u \in C((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$ è soluzione viscosità di (82) se

$$0 \leq \psi_t(t, x) + H(t, x, \psi(t, x), D\psi(t, x)) \leq \phi_t(t, x) + H(t, x, \phi(t, x), D\phi(t, x)) \leq 0,$$

per ogni $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$, per ogni ϕ e ψ , rispettivamente sopratangente e sottotangente a u in (t, x) .

Nel caso che $p \rightarrow H(t, x, r, p)$ sia convessa una nozione alternativa è quella di soluzione viscosità semicontinua o soprasoluzione bilaterale. Una funzione $u \in SCI((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$ è soluzione viscosità semicontinua di (82) se

$$\psi_t(t, x) + H(t, x, \psi(t, x), D\psi(t, x)) = 0$$

per ogni ψ sottotangente a u in (t, x) . Nel caso che u sia continua e $p \rightarrow H(t, x, r, p)$ sia convessa, allora le due nozioni di soluzione viscosità coincidono ([3]).

Osservazione 15. Bisogna osservare che l'equazione $H(x, u, Du) = 0$ non è equivalente a $-H(x, u, Du) = 0$ in senso viscosità; per esempio, $u(x) = |x|$ è soluzione viscosità di $-|u'(x)| + 1 = 0$ ma non di $|u'(x)| - 1 = 0$ nell'intervallo aperto $(-1, 1)$.

Esempio 3. Le funzioni di Rademacher sono definite per ogni $k \in \mathbb{N}$ da

$$u_k(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}}, & \text{se } x \in [-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{2i+1}{2^k}) \\ -x - 1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}, & \text{se } x \in [-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}) \end{cases} \quad x \in I_i^{(k)},$$

dove gli intervalli $I_i^{(k)} = [-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}})$, per $k = 0, 1, \dots$, costituiscono una partizione di $[-1, 1)$,

i.e. $[-1, 1) = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} I_i^{(k)}$.

Ogni funzione u_k verifica quasi ovunque l'equazione

$$|u'(x)| = 1, \quad x \in (-1, 1)$$

ma solo la funzione u_0 è soluzione viscosità .

Osserviamo anche che per $k \rightarrow +\infty$, le u_k convergono uniformemente alla funzione nulla che ovviamente non verifica l'equazione in nessun punto.

Il prossimo enunciato comprende alcune proprietà elementari delle soluzioni viscosità dell'equazione

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (83)$$

Teorema 5. *Per le soluzioni viscosità valgono le seguenti affermazioni:*

(i) *Se u è soluzione viscosità di (83) allora u verifica (83) in ogni punto di differenziabilità .*

(ii) *Se $u \in C^1(\Omega)$ è soluzione classica di (83) allora u è soluzione viscosità di (83).*

(iii) *Se u è localmente lipschitziana ed è soluzione viscosità di (83) allora u verifica (83) quasi ovunque.*

Per una dimostrazione di questo risultato si rinvia per esempio a [1].

4.2 Il principio di confronto.

Consideriamo l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0,$$

definita su un aperto Ω . In generale ci interessa dimostrare che l'hamiltoniana H soddisfa *proprietà di confronto* del tipo seguente:

$$H(x, u_1, Du_1) \leq 0 \leq H(x, u_2, Du_2), \quad \text{in senso di viscosità in } \Omega \quad (84)$$

e

$$u_1(x) \leq u_2(x), \quad \text{per ogni } x \in \partial\Omega, \quad (85)$$

allora

$$u_1(x) \leq u_2(x), \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \quad (86)$$

Il primo risultato di questo tipo riguarda l'equazione eiconale.

Teorema 6. *Sia Ω un aperto e limitato di \mathbb{R}^N . Se $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ verificano*

$$|Du_1| \leq 1 \leq |Du_2|, \quad \text{in senso di viscosità in } \Omega \quad (87)$$

e

$$u_1(x) \leq 0 \leq u_2(x), \quad \text{per ogni } x \in \partial\Omega,$$

allora

$$u_1(x) \leq u_2(x), \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la validità del principio di confronto enunciato consideriamo la seguente combinazione convessa:

$$u_\lambda(x) = \lambda u_1(x) + (1 - \lambda) \min_{\bar{\Omega}} u_1, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Si verifica facilmente che

$$u_\lambda \leq u_1, \quad \text{e } u_\lambda \rightarrow u_1 \text{ uniformemente per } \lambda \rightarrow 1.$$

Sia Φ è sopratangente a u_1 in x , allora è immediato notare che

$$|D(\lambda\Phi + (1 - \lambda) \min_{\bar{\Omega}} u_1)(x)| = \lambda |D\Phi(x)| \leq \lambda < 1, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Dato che, come è facile verificare, Φ è sopratangente a u_1 in un punto x se e solo se $\lambda\Phi + (1 - \lambda)\min_{\overline{\Omega}} u_1$ è sopratangente a u_λ nel medesimo punto x , dall'ipotesi (110) segue che u_λ verifica, in senso viscosità, la seguente disequazione:

$$|Du_\lambda(x)| \leq \lambda < 1, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall x \in \Omega. \quad (88)$$

Mostriamo ora che questa proprietà di essere sottosoluzione viscosità stretta implica che

$$u_\lambda(x) \leq u_2(x), \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (89)$$

da cui segue poi la tesi passando al limite per $\lambda \rightarrow 1$.

Per dimostrare la (89) si suppone per assurdo che

$$\exists \bar{\lambda} \in [0, 1) \text{ e } \exists \bar{x} \in \overline{\Omega} : (u_{\bar{\lambda}} - u_2)(\bar{x}) = \max_{\overline{\Omega}}(u_{\bar{\lambda}} - u_2) =: \delta > 0.$$

Si considera poi, per $\epsilon > 0$, la funzione ausiliaria

$$A_\epsilon(x, y) = u_{\bar{\lambda}}(x) - u_2(y) - \frac{|x - y|^2}{2\epsilon}.$$

Sia (x_ϵ, y_ϵ) un suo punto di massimo di A_ϵ su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. È immediato osservare che

$$A_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq A_\epsilon(\bar{x}, \bar{x}) = \delta > 0, \quad \forall \bar{x} \in \overline{\Omega}.$$

Con semplici considerazioni, da ciò si deduce la seguente stima:

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| \leq C\sqrt{\epsilon}, \quad (90)$$

con

$$C = \sqrt{2 \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} |u_\lambda(x)| + \max_{y \in \overline{\Omega}} |u_2(y)| \right)}.$$

Supponiamo ora che $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \Omega \times \Omega$ per ogni ϵ sufficientemente piccolo. Dato che x_ϵ è un punto di massimo per $x \mapsto u_{\bar{\lambda}}(x) - u_2(y_\epsilon) - \frac{|x - y_\epsilon|^2}{2\epsilon}$, si ottiene che la funzione

$$\Phi(y) = u_2(y_\epsilon) + \frac{|y - y_\epsilon|^2}{2\epsilon}$$

o eventualmente una sua traslata, è sopratangente a $u_{\bar{\lambda}}$ in x_ϵ e dunque dalla (88) si può dedurre

$$\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon} \leq \bar{\lambda}. \quad (91)$$

In maniera analoga si osserva che, essendo y_ϵ un punto di minimo per la funzione $y \mapsto -u_{\bar{\lambda}}(x_\epsilon) + u_2(y) + \frac{|x_\epsilon - y|^2}{2\epsilon}$, la funzione

$$\psi(y) = \frac{|x_\epsilon - y|^2}{2\epsilon} - u_{\bar{\lambda}}(x_\epsilon)$$

è sottotangente a u_2 in y_ϵ . Pertanto la (88) implica che $1 \leq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon}$ e quindi, tenendo conto della (91), si giunge alla seguente contraddizione

$$1 \leq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon} \leq \bar{\lambda} < 1,$$

che prova la (89) in questo caso.

Resta da esaminare la possibilità che per ogni ϵ uno tra i punti x_ϵ, y_ϵ appartenga a $\partial\Omega$. Supponiamo che sia $x_\epsilon \in \partial\Omega$; per compattezza e tenendo conto di (90) si ha che $(x_\epsilon, y_\epsilon) \rightarrow (x^*, x^*) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$ per $\epsilon \rightarrow 0$. La disuguaglianza $A_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq A_\epsilon(x, x)$ implica dunque

$$u_\lambda(x_\epsilon) - u_2(y_\epsilon) \geq u_\lambda(x) - u_2(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Passando al limite in questa per $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$u_\lambda(x) - u_2(x) \leq u_\lambda(x^*) - u_2(x^*) \leq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

e quindi facendo tendere λ a 1 si stabilisce la validità di (89) anche in questo caso.

□

Nei seguenti teoremi presenteremo dei principi di confronto per hamiltoniane più generali dell'eiconale appena studiata. Tali risultati sono tratti dal libro di Guy Barles ([2]).

Dato $\Omega \in \mathbb{R}^N$ aperto e limitato, in questo capitolo ci si ripropone di dimostrare risultati di unicità per problemi di Hamilton-Jacobi. Si studiano quindi i due seguenti casi.

1. **Problema stazionario:**

$$H(x, Du) = 0, \text{ in } \Omega. \quad (92)$$

2. **Problema evolutivo:**

$$\frac{\partial}{\partial t} u + H(x, t, Du) = 0, \text{ in } \Omega \times (0, T). \quad (93)$$

L'hamiltoniana H è una funzione scalare continua.

Supponiamo inoltre che H soddisfi

(H1) $H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq \gamma_R(u - v)$, con $\gamma_R > 0$ opportuna, per ogni $x \in \Omega$, $-R \leq v \leq u \leq R$ e $p \in \mathbb{R}^N$, $\forall R \in (0, +\infty)$.

(H2) $|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq m_R(|x - y|(1 + |p|))$, con $m_R(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0^+$ e per ogni $x, y \in \Omega$, $-R \leq u \leq R$ e $p \in \mathbb{R}^N$, $\forall R \in (0, +\infty)$.

Si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 7. *Sotto le ipotesi (H1) e (H2) vale un risultato di unicità per il problema (92). Inoltre il risultato resta vero se si sostituisce (H2) con una richiesta di regolarità di tipo Sobolev, ovvero se $u \in W^{1,+\infty}(\Omega)$ o $v \in W^{1,+\infty}(\Omega)$.*

Risultati di unicità per il problema stazionario (92) si esprimono mediante criteri di confronto del tipo: se $u, v \in C(\bar{\Omega})$ sono rispettivamente sottosoluzione e soprassoluzione viscosità di (92) e se $u \leq v$ su $\partial\Omega$, allora $u \leq v$ su $\bar{\Omega}$.

Osservazione 16. *L'ipotesi (H1) esclude equazioni di tipo conservazione e in generale tutte le equazioni in cui non compaia una dipendenza esplicita dalla variabile u a causa della richiesta stretta positività della costante γ_R . In seguito vedremo come affrontare i casi in cui $\gamma_R = 0$, proprio per coprire questi casi.*

Osservazione 17. *L'ipotesi (H2) è in particolare sempre soddisfatta se H è lipschitziana in x . Infatti basta prendere $m_R(t) = m(t) := Lt$, dove L è la costante di lipschitzianità di H , poichè $|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq L|x - y| \leq L|x - y|(1 + |p|)$.*

Da risultati di unicità come il precedente seguono sempre corollari di tipo principio del massimo come il seguente.

Corollario 8. *Sotto le ipotesi del Teorema 7 vale*

$$\max_{\bar{\Omega}}(u - v)^+ \leq \max_{\partial\Omega}(u - v)^+.$$

Vediamo ora di comprendere tali ipotesi considerando il caso di un'equazione di trasporto.

$$-b(x) \cdot Du + \gamma u = f(x), \text{ in } \Omega. \quad (94)$$

In tale caso l'ipotesi (H1) è banalmente soddisfatta non appena $\gamma > 0$. L'ipotesi (H2) in tale caso è soddisfatta quando il campo di vettori b è lipschitziano e f è uniformemente continua su Ω . In realtà in tale caso

la richiesta di lipschitzianet  per il campo b   in pratica anche la pi  restrittiva ammissibile.

Per convincerci di ci  scriviamo l'(H2) per la (94) e per semplicit  poniamo anche $f \equiv 0$:

$$|(b(x) - b(y)) \cdot p| \leq m_R (|x - y|(1 + |p|)),$$

in particolare per ogni direzione p vale:

$$|(b(x) - b(y)) \cdot p| \leq m_R(|x - y|).$$

Quindi, se indichiamo con $\| \cdot \|$ la norma del campo b , si ottiene:

$$\|b(x) - b(y)\| \leq m_R(|x - y|) \tag{95}$$

  noto che le propriet  dell'equazione (94) (in particolare i risultati di unicit ) sono legati a quelle del sistema dinamico associato (metodo delle caratteristiche):

$$\dot{X}(t) = b(X(t)). \tag{96}$$

Si osserva infine che i risultati standard di unicit  per il problema di Cauchy associato alla (96) con dato $X(0) = x \in \Omega$ richiedono che il campo b sia lipschitziano (Teorema di Cauchy-Lipschitz). L'ipotesi (H2) appare quindi molto naturale per ottenere risultati di unicit  per (92).

La dimostrazione del Teorema 95 non presenta particolari difficolt  e segue argomenti standard per provare risultati siffatti nella teoria delle soluzioni viscosit . Vediamo di evidenziare i passaggi principali di tale metodo di procedere.

- (1) **Divisione delle variabili.** Per sfruttare contemporaneamente il fatto che u   sottosoluzione v . mentre v   soprasoluzione si considera un'opportuna perturbazione $\varphi_\varepsilon(x, y)$ (nel nostro caso $\frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$) tale che la funzione $u(x) - v(y) - \varphi_\varepsilon(x, y)$ ammette massimo. Tale perturbata   definita in dipendenza di uno o pi  parametri che vengono poi fatti tendere a zero.
- (2) **Convergenza del massimo perturbato al massimo di $u - v$.** Tale caso non presenta particolari difficolt  nel caso in cui per ipotesi sia u che v siano continue per ipotesi.
- (3) **Stima del modulo del gradiente della perturbata nei punti di massimo della perturbata stessa.** In questo punto si sfrutta in maniera essenziale l'ipotesi (H2).

Occupiamoci ora del caso evolutivo. Prima di enunciare un risultato di unicit  per il problema (93) osserviamo che in tale caso il criterio di confronto si riscrive richiedendo che la sottosoluzione u e la soprasoluzione v soddisfino la disuguaglianza $u \leq v$ valga sulla frontiera parabolica, i.e. $\partial\Omega \times [0, T] \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$.

Teorema 9. *Se $H \in C(\bar{\Omega} \times (0, T) \times \mathbb{R}^N)$ e vale (H2) (con m_R indipendente da t e da R), allora vale un risultato di unicit  per (93).*

Dimostrazione. La dimostrazione procede utilizzando tecniche molto standard per dimostrare risultati di unicit  per soluzioni viscosit . Per prima cosa   essenziale osservare che i punti della parte di frontiera $\Omega \times \{T\}$ si trattano come punti interni in quanti si pu  facilmente provare che se u   sottosoluzione [soprasoluzione] viscosit  in $\Omega \times (0, T)$ lo   anche in $\Omega \times (0, T]$, intendendo che nei punti $\Omega \times \{T\}$ per ogni funzione $\phi \in C^1(\Omega \times (0, T])$ tale che $u - \phi$ ha un massimo [minimo] locale in (x_0, T) vale

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, T) + H(x_0, T, D\phi(x_0, T)) \leq 0, \quad [\geq 0].$$

Supponiamo quindi per assurdo che

$$M := \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} (u - v) > 0. \tag{97}$$

Osserviamo inoltre che possiamo sempre supporre che u sia una sottosoluzione stretta (a meno di sostituirla con $u_\alpha(x, t) := u(x, t) - \alpha t$ e mandare poi il parametro α a 0) in modo da poter sfruttare una disuguaglianza stretta nello stimare la divgenza $u - v$.

Consideriamo ora la seguente funzione perturbata, dipendente dai parametri $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$:

$$\psi_{\varepsilon, \eta}(x, y, s, t) := u(x, t) - v(y, s) - \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} - \frac{|t - s|^2}{\eta^2}.$$

Sia quindi $P(\varepsilon, \eta) := (x_{\varepsilon, \eta}, y_{\varepsilon, \eta}, t_{\varepsilon, \eta}, s_{\varepsilon, \eta})$ un punto di massimo per la funzione $\psi_{\varepsilon, \eta}$ in $\Omega \times (0, T]$. Procedendo come di consueto consideriamo dapprima $\psi_{\varepsilon, \eta} = \psi_{\varepsilon, \eta}(x, t) = u(x, t) - \phi_1(x, t)$ con $\phi_1(x, t) = v(y, s) + \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} + \frac{|t - s|^2}{\eta^2}$ in modo da sfruttare il fatto che u è sottosoluzione viscosità stretta che verifica quindi il corrispondente test relativamente a ϕ_1 . Poi in modo analogo interpretiamo $\psi_{\varepsilon, \eta} = \psi_{\varepsilon, \eta}(y, s) = -[v(y, s) - \phi_2(y, s)]$, con $\phi_2(y, s) = u(x, t) + \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} + \frac{|t - s|^2}{\eta^2}$ per sfruttare il fatto che v è soprasoluzione. A questo punto osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_1(P(\varepsilon, \eta)) = \partial \phi_2(P(\varepsilon, \eta)) = 2 \frac{t_{\varepsilon, \eta} - s_{\varepsilon, \eta}}{\eta^2}$$

e quindi il termine derivata rispetto al tempo scompare. Inoltre

$$D_x \phi_1(P(\varepsilon, \eta)) = D_y \phi_1(P(\varepsilon, \eta)) = 2 \frac{x_{\varepsilon, \eta} - y_{\varepsilon, \eta}}{\varepsilon^2},$$

permettendoci di sfruttare l'ipotesi (H2). Si ottiene dunque la seguente stima:

$$H \left(x_{\varepsilon, \eta}, t_{\varepsilon, \eta}, 2 \frac{x_{\varepsilon, \eta} - y_{\varepsilon, \eta}}{\varepsilon^2} \right) - H \left(y_{\varepsilon, \eta}, s_{\varepsilon, \eta}, 2 \frac{x_{\varepsilon, \eta} - y_{\varepsilon, \eta}}{\varepsilon^2} \right) \leq \alpha < 0.$$

Poichè abbiamo supposto $M > 0$ valgano le usuali osservazioni sul comportamento dei punti di massimo al tendere dei parametri a zero e inoltre, se indichiamo con $M_{\varepsilon, \eta}$ il massimo di $\psi_{\varepsilon, \eta}$, vale $M_{\varepsilon, \eta} \rightarrow 0$ al tendere a zero dei parametri.

Consideriamo dapprima il limite per $\eta \rightarrow 0^+$. In tale caso sappiamo che $P(\varepsilon, \eta) \rightarrow (x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_0, t_0)$ e quindi:

$$H \left(x_\varepsilon, t_0, 2 \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \right) - H \left(y_\varepsilon, t_0, 2 \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \right) \leq \alpha < 0.$$

Applichiamo quindi l'ipotesi (H2):

$$-m \left(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \left(1 + 2 \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \right) \right) \leq \alpha < 0.$$

Per ottenere la tesi è sufficiente quindi passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, infatti si può innanzitutto sfruttare il fatto che (sempre grazie all'ipotesi per assurdo (97)) $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \rightarrow 0$ e analogamente $2 \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$. Quindi, poichè $m(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0^+$, tale passaggio al limite ci permette di concludere mediante l'assurdo:

$$0 \leq \alpha < 0.$$

□

Diamo adesso un altro risultato di unicità per il problema evolutivo (93) sfruttando delle ipotesi in un certo senso più naturali in tale caso. consideriamo quindi la seguente caratterizzazione per l'hamiltoniana H :

(H7) $|H(x, t, p) - H(y, s, p)| \leq m(|x - y| + |t - s|)(1 + |p| + Q(x, y, t, s, p))$, per ogni $x, y \in \bar{\Omega}$, $t, s \in [0, T]$, $p \in \mathbb{R}^N$, dove $m(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0^+$ e $Q(x, y, t, s, p) := \max\{|H(x, t, p)|, |H(y, s, p)|\}$.

Teorema 10. *Sotto l'ipotesi (H7) vale un risultato di unicità per (93).*

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente. Cerchiamo di ripercorrerla brevemente mettendo in luce dove necessario le differenze.

Ovviamente dobbiamo solo applicare l'ipotesi (H7) dove avevamo applicato la (H2). In tale caso è inoltre opportuno applicare tale stima prima di passare al limite per $\eta \rightarrow 0^+$. Quindi vale

$$-m \left((|x_{\varepsilon, \eta} - y_{\varepsilon, \eta}| + |t_{\varepsilon, \eta} - s_{\varepsilon, \eta}|) \left(1 + 2 \frac{|x_{\varepsilon, \eta} - y_{\varepsilon, \eta}|^2}{\varepsilon^2} + Q \left(x_{\varepsilon, \eta}, y_{\varepsilon, \eta}, t_{\varepsilon, \eta}, s_{\varepsilon, \eta}, 2 \frac{|x_{\varepsilon, \eta} - y_{\varepsilon, \eta}|^2}{\varepsilon^2} \right) \right) \right) \leq \alpha < 0.$$

Sfruttando le analoghe considerazioni sul comportamento dei punti di massimo perturbati si passa al limite per $\eta \rightarrow 0^+$. Per la continuità di H , Q risulta continua e analogamente anche la funzione m può essere scelta continua e quindi si ottiene:

$$-m \left(|x_{\varepsilon} - y_{\varepsilon}| \left(1 + 2 \frac{|x_{\varepsilon} - y_{\varepsilon}|^2}{\varepsilon^2} + Q \left(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}, t_0, s_0, 2 \frac{|x_{\varepsilon} - y_{\varepsilon}|^2}{\varepsilon^2} \right) \right) \right) \leq \alpha < 0.$$

Per ottenere il medesimo assurdo trovato nella precedente dimostrazione, prima di passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e sfruttare il fatto che $m(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0^+$, è necessario osservare che se $\varepsilon \rightarrow 0^+$ allora $Q(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}, t_0, s_0, 2(|x_{\varepsilon} - y_{\varepsilon}|^2)/\varepsilon^2) \rightarrow M$ e quindi l'argomento della funzione m tende nella sua globalità ancora a zero in quanto prodotto di qualcosa che tende a zero e qualcosa di positivo e limitato. Quindi analogamente a prima si giunge all'assurdo:

$$0 \leq \alpha < 0.$$

□

Vediamo a questo punto di capire meglio l'introduzione dell'ipotesi (H7) a sostituire la (H2).

Osserviamo innanzitutto che nel caso evolutivo appare molto naturale studiare risultati di unicità riconducendosi al caso stazionario mediante l'impiego di una nuova hamiltoniana definita da:

$$\tilde{H}(x, t, p_t, p) := p_t + H(x, t, p).$$

Il problema evolutivo (93) equivale quindi al problema stazionario $\tilde{H} = 0$.

Abbiamo già osservato che (H2) vale in particolare nel caso in cui H è lipschitziana. Applicando tale ipotesi all'hamiltoniana \tilde{H} si ottiene le due seguenti stime sulle derivate:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}(x, t, p_t, p) \right| \leq C(1|p| + |p_t|), \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{H}(x, t, p_t, p) \right| \leq C(1|p| + |p_t|), \end{cases} \quad (98)$$

con $C > 0$ costante opportuna.

Poichè per come è definita \tilde{H} si nota subito che $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{H} = \frac{\partial}{\partial x} H$ e analogamente $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{H} = \frac{\partial}{\partial t} H$ e H non dipende da p_t , è naturale cercare di rendere le precedenti stime indipendenti da tale variabile. Per ottenere ciò si osserva solo che studiare $\tilde{H} = 0$ equivale a porre $p_t = -H(x, t, p)$ e quindi la (98) può essere riscritta come segue:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}(x, t, p_t, p) \right| \leq C(1|p| + |H(x, t, p)|), \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{H}(x, t, p_t, p) \right| \leq C(1|p| + |H(x, t, p)|), \end{cases} \quad (99)$$

Tale condizione è espressa sotto forma di modulo di continuità proprio dalla (H7). Si può infatti provare che la condizione (99) implica la (H7). Provare tale implicazione è immediato. Vediamo in dettaglio come

procedere.

$$\begin{aligned} |H(x, t, p) - H(y, s, p)| &\leq |H(x, t, p) - H(y, t, p)| + |H(y, t, p) - H(y, s, p)| \\ &\leq C(1 + |p| + |H(x, t, p)|)|x - y| + C(1 + |p| + |H(y, s, p)|)|t - s| \leq C(1 + |p| + Q(x, y, t, s, p))(|x - y| + |t - s|). \end{aligned}$$

Quindi basta prendere $m(t) := Ct$ perchè (H7) risulti soddisfatta.

Esempio 4. Il precedente risultato di unicit  si applica alla Teoria delle Grandi Deviazioni, i.e. al problema evolutivo:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \sigma(x, t)|Du|^2 - b(x, t) \cdot Du = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e limitato e con σ e b funzioni lipschitziane e σ funzione a valori reali tale che $\sigma(x, t) \geq \nu > 0$ su $\Omega \times (0, T)$.

Svolgimento.

Dobbiamo solo far vedere che l'hamiltoniana $H(x, t, p) := \sigma(x, t)p^2 - b(x, t) \cdot p$ soddisfa l'ipotesi (H7). Indichiamo con L_σ e L_b le costanti di lipschitzianet  di σ e b rispettivamente.

Per prima cosa osserviamo che una funzione lipschitziana su un limitato   anche limitata nell'aperto stesso. Infatti, fissiamo un punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ e proviamo che tale affermazione   vera in particolare per b .

$$|b(x, t)| \leq |b(x, t) - b(x_0, t_0)| + |b(x_0, t_0)| \leq L_b(|x - x_0| + |t - t_0|) + L_b \leq 2(\text{diam}(\Omega) + T) + C \leq B.$$

Tale osservazione sar  molto utile in seguito.

Andiamo adesso a stimare il primo membro della (H7).

$$\begin{aligned} |H(x, t, p) - H(y, s, p)| &\leq |\sigma(x, t) - \sigma(y, s)|p^2 + |(b(x, t) - b(y, s)) \cdot p| \leq \\ &\leq L_\sigma(|x - y| + |t - s|)p^2 + L_b(|x - y| + |t - s|)|p|. \end{aligned}$$

Stimiamo ora opportunamente il termine p^2 sfruttando l'osservazione fatta su b . Osserviamo che

$$\sigma(x, t)p^2 = b(x, t) \cdot p + H(x, t, p).$$

Inoltre per ipotesi $\sigma(x, y) \leq \nu$, quindi

$$p^2 \leq \frac{1}{\nu} (|b(x, t)||p| + |H(x, t, p)|) \leq \frac{1}{\nu} (B|p| + |H(x, t, p)|),$$

per ogni $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Da ci  segue che

$$p^2 = 2\frac{p^2}{2} \leq \frac{1}{2\nu} (B|p| + |H(x, t, p)| + B|p| + |H(y, s, p)|) \leq \frac{B|p| + Q(x, y, t, s, p)}{\nu}.$$

In definitiva quindi, tornato alla stima che ci interessa indagare, si ha

$$|H(x, t, p) - H(y, s, p)| \leq (|x - y| + |t - s|) \left\{ L_\sigma \frac{B|p| + Q(x, y, t, s, p)}{\nu} + L_b|p| \right\}.$$

L'ipotesi (H7) risulta quindi soddisfatta con $m(t) := Ct$. Se poniamo $C := \max\{L_\sigma/\nu, (L_\sigma B)/\nu, L_b\}$, allora otteniamo

$$|H(x, t, p) - H(y, s, p)| \leq C(|x - y| + |t - s|)(|p| + Q(x, y, t, s, p)) \leq C(|x - y| + |t - s|)(1 + |p| + Q(x, y, t, s, p)).$$

L'ipotesi (H7) risulta quindi soddisfatta con $m(t) := Ct$.

□

5 Esercizi e problemi.

- Verificare che se $DH(Dg(x)) \neq DH(Dg(\hat{x}))$ e $(x - \hat{x}) \cdot (DH(Dg(x)) - DH(Dg(\hat{x}))) > 0$, allora per

$$t = \frac{(x - \hat{x}) \cdot (DH(Dg(x)) - DH(Dg(\hat{x})))}{|DH(Dg(x)) - DH(Dg(\hat{x})))|^2} > 0$$

si ha $X(t, x) = X(t, \hat{x})$.

- Calcolare la funzione u data dalla formula (75) nei seguenti tre casi

1. $H(p) = b \cdot p$ dove b è un vettore fissato in \mathbb{R}^N ($u(t, x) = g(x - tb)$)

2. $H(p) = \frac{1}{2}|p|^2$, $g(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ ($u(t, x) = \frac{|x|^2}{2(1+t)}$)

3. $H(p) = -\frac{1}{2}|p|^2$, $g(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ ($u(t, x) = \frac{|x|^2}{2(1-t)}$)

- Sia $K = \mathbb{R}^2 \setminus [-1, 1] \times [-1, 1]$. Determinare i punti di singolarità di d_K

- Quali proprietà della distanza euclidea sono state usate nella sezione 1? I risultati si estendono a norme non euclidee? E a distanze non definite da norme?

- Uno spazio metrico (E, d) è *metricamente convesso* se per ogni $x, y \in E$ e per ogni $r \in \mathbb{R}$ tale che $0 \leq r \leq d(x, y)$ esiste $z \in E$ tale che $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$. Dare esempi di spazi metrici metricamente convessi.

- Se A è una matrice $N \times N$ simmetrica definita positiva allora $\|x\| = \sqrt{Ax \cdot x}$ è una norma su \mathbb{R}^N equivalente a quella euclidea. Suggerimento: si deve usare $A^{\frac{1}{2}}$ per dimostrare la disuguaglianza triangolare; infatti

$$\|x + y\|^2 = Ax \cdot x + Ay \cdot y + 2Ax \cdot y$$

mentre

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

e quindi la disuguaglianza triangolare vale se e solo se

$$Ax \cdot y \leq \|x\|\|y\|$$

; questo è vero perchè usando la matrice $A^{\frac{1}{2}}$ si ha

$$\begin{aligned} Ax \cdot y &= A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} x \cdot y = A^{\frac{1}{2}} x \cdot A^{\frac{1}{2}} y \leq |A^{\frac{1}{2}} x| |A^{\frac{1}{2}} y| = \\ &= \sqrt{A^{\frac{1}{2}} x \cdot A^{\frac{1}{2}} x} \sqrt{A^{\frac{1}{2}} y \cdot A^{\frac{1}{2}} y} = \sqrt{Ax \cdot x} \sqrt{Ay \cdot y} = \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Rifare i conti del paragrafo 1 (proiezione su un chiuso) con questa norma.

- Consideriamo l'equazione di trasporto

$$u_t + b \cdot Du = 0.$$

La funzione $H(p) = b \cdot p$ è lineare e perciò non verifica la condizione $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$.

Mostrare che la trasformata di Legendre (generalizzata) H^* di H è data da

$$H^*(q) = \begin{cases} 0, & \text{se } q = b, \\ +\infty, & \text{se } q \neq b; \end{cases} \quad (100)$$

e che quindi la funzione di Hopf-Lax per l'equazione di trasporto con un dato iniziale $g \in Lip(\mathbb{R}^N)$ è $u(t, x) = g(x + tb)$.

- Un altro caso significativo in cui H non verifica la condizione di superlinearità è quello dell'equazione

$$u_t + |Du| = 0.$$

In questo caso la trasformata di Legendre (generalizzata) H^* di H è data da

$$H^*(q) = \begin{cases} 0, & \text{se } |q| \leq 1, \\ +\infty, & \text{se } |q| > 1, \end{cases} \quad (101)$$

e che quindi la funzione di Hopf-Lax con un dato iniziale $g \in Lip(\mathbb{R}^N)$ è $u(t, x) = \min_{|z| \leq 1} g(x + tz) = \min_{y: |y-x| \leq 1} g(y)$.

- Un altro caso significativo in cui H non verifica la condizione di superlinearità è quello dell'equazione

$$u_t + |Du| = 0.$$

In questo caso la trasformata di Legendre (generalizzata) H^* di H è data da

$$H^*(q) = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| \leq 1, \\ +\infty, & \text{se } |q| > 1; \end{cases} \quad (102)$$

e che quindi la funzione di Hopf-Lax con un dato iniziale $g \in Lip(\mathbb{R}^N)$ è $u(t, x) = \min_{|z| \leq 1} g(x + tz) = \min_{y: |y-x| \leq 1} g(y)$.

- Sia A una matrice $N \times N$ a coefficienti costanti e definita positiva. Considerare l'equazione parabolica

$$w_t - \text{tr}(A D^2 w) = 0.$$

Calcolare la soluzione fondamentale in questo caso.

5.1 Un semplice esempio unidimensionale.

Da un punto di vista introduttivo è utile considerare il seguente semplicissimo problema di Dirichlet unidimensionale:

$$|u'(x)| = 1, \quad x \in I = (-1, 1) \quad (103)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (104)$$

E' immediato osservare che il teorema di Rolle costituisce una ostruzione alla risolubilità di (103), (104) in $C^1(I) \cap C^0(\bar{I})$.

Una strategia naturale verso l'esistenza di soluzioni di questo problema è quella di richiedere che l'equazione sia soddisfatta quasi ovunque in I e non in tutti i punti; la via di definire soluzioni deboli del problema tramite integrazione per parti è infatti impraticabile perchè l'equazione è nonlineare nella derivata di ordine massimo. Ciò porta ad ambientare il problema anzichè in $C^1(I)$ nel più ampio spazio $Lip_{loc}(I)$ delle funzioni localmente lipschitziane: il classico Teorema di Rademacher garantisce infatti la differenziabilità quasi ovunque di tali funzioni. In questo ambito l'esistenza di soluzioni è evidente ma la controparte è che le desiderabili proprietà di unicità e di stabilità della soluzione vengono a mancare.

Infatti, è immediato verificare che le funzioni di Rademacher definite da

$$u_k(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}}, & \text{se } x \in \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{2i+1}{2^k}\right) \\ -x - 1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}, & \text{se } x \in \left[-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}\right) \end{cases} \quad x \in I_i^{(k)}$$

dove gli intervalli $I_i^{(k)} = [-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}})$ ($k = 0, 1, \dots$) costituiscono una partizione di $[-1, 1)$, i.e. $[-1, 1) = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} I_i^{(k)}$, sono tutte soluzioni quasi ovunque di (103), (104) e, per $k \rightarrow +\infty$, convergono uniformemente alla funzione nulla che ovviamente non verifica (103) in nessun punto.

La strategia proposta da Crandall, Evans e Lions (vedi [6, 7, 10]) consiste nel testare puntualmente una candidata soluzione u da sotto e da sopra con funzioni regolari. Più precisamente, se $u \in C(\bar{I})$ e fissato un arbitrario $x \in I$ si considerano funzioni $\phi, \psi \in C^1(I)$ tali che

$$u(x) = \phi(x) = \psi(x); \psi(y) \leq u(y) \leq \phi(y) \text{ per } y \text{ in un intorno di } x. \quad (105)$$

Le funzioni ϕ, ψ vengono dette, rispettivamente, *sopratangente* e *sottotangente* (locali) a u in x . Calcoli elementari mostrano che se si sceglie

$$u(x) = 1 - |x| = \text{dist}(x, I^c)$$

si ha

$$|\phi'(x)| \leq 1 \leq |\psi'(x)| \quad (106)$$

per ogni $x \in I$, per ogni ϕ sopratangente a u in x e per ogni ψ sottotangente a u in x (si noti che in $x = 0$ la funzione u non ammette alcuna funzione sottotangente). E' facile convincersi che nessun'altra delle soluzioni quasi ovunque di (103) sopra segnalate verifica tale proprietà e che, fatto a prima vista sorprendente, la funzione $-u$ non verifica le disuguaglianze (106). Non è affatto ovvio invece che la funzione $u(x) = \text{dist}(x, I^c)$ sia l'unica tra tutte le funzioni di $C(\bar{I})$ nulle al bordo a verificare le disuguaglianze (106).

6 Ottica geometrica per l'equazione delle onde e di helmoltz.

In questa sezione mostreremo come, nello studio di problemi di ottica geometrica, spesso ci si riconduca, in modo piuttosto naturale, ad un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo Hamilton-Jacobi. Più precisamente, si vedrà come, a partire dall'equazione delle onde, attraverso opportune ipotesi analitiche suggerite dalla natura fisica del problema in questione, si arrivi a studiare un'equazione di Hamilton-Jacobi su una nuova funzione incognita, strettamente legata alla soluzione dell'equazione di partenza.

6.1 Cenni sull'equazione delle onde.

Come noto, l'equazione delle onde (di D'Alembert) è della forma

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad (107)$$

dove l'incognita è una funzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e Δ è l'operatore di Laplace definito da $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$.

La (107) è un'equazione di evoluzione lineare omogenea del secondo ordine. Se si definisce l'operatore di D'Alembert come l'operatore differenziale dato da

$$\square = \partial_t^2 - \Delta,$$

l'equazione (107) si può scrivere nella forma compatta

$$\square u = 0.$$

Ogni operatore differenziale lineare L di ordine m può essere scritto nella forma

$$L = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(t, x) D^\alpha,$$

dove $a_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono i coefficienti di L e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

E' abbastanza naturale, quindi, associare ad un operatore differenziale L un polinomio p su \mathbb{R}^n , detto **simbolo** di L , definito da

$$p(\xi) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(t, x) \xi^\alpha,$$

dove $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$. In particolare, si definisce **simbolo principale** dell'operatore L il polinomio p , omogeneo di grado m su \mathbb{R}^n , dato da

$$p(\xi) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = m}} a_\alpha(t, x) \xi^\alpha.$$

Il simbolo principale dell'operatore di D'Alembert é dato, dunque, dal polinomio

$$p(\xi) = \xi_1^2 - \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i^2.$$

L'iperbolicità dell'operatore \square risiede nel fatto che tale polinomio ha radici reali. Ad esempio l'operatore di Laplace Δ , che ha come simbolo principale il polinomio

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

non é un operatore iperbolico, ma sarà detto **ellittico**.

Concludiamo questa breve introduzione con un esempio molto noto di un operatore differenziale lineare del secondo ordine che cambia nel tempo la sua natura algebrica. Tale operatore é ricordato come operatore di Tricomi ed é della forma

$$L = \partial_t^2 + t\partial_x^2,$$

con $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si vede immediatamente che tale operatore é iperbolico per $t < 0$, ellittico per $t > 0$.

6.2 Ottica geometrica: soluzioni oscillanti.

Per $n = 1$, l'equazione (107) rappresenta un modello matematico per le piccole oscillazioni di una corda vibrante; per $n = 2$ le piccole oscillazioni di una membrana vibrante; per $n = 3$ descrive la diffusione di un campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo. In generale, quindi, l'equazione (107) studia la propagazione nel tempo di fenomeni di natura ondulatoria. Diventa chiaro, allora, come in questioni di ottica geometrica ci si imbatta spesso in equazioni del tipo (107).

In questa sede tratteremo una parte matematica di tali argomenti. La natura fisica di questo problema suggerisce di studiare il comportamento di soluzioni fortemente oscillanti dell'equazione (107); l'idea di base é che tale comportamento possa essere compreso attraverso lo studio di una opportuna funzione di fase verso la quale tendano a stabilizzarsi le oscillazioni. La prova matematica formale che segue conferma pienamente quanto appena espresso.

Supponiamo di cercare soluzioni complesse dell'equazione (107) della forma

$$u^\epsilon(t, x) = a^\epsilon(t, x)e^{\frac{ip^\epsilon(t, x)}{\epsilon}}, \quad (108)$$

dove $\epsilon > 0$ ed a^ϵ, p^ϵ sono funzioni reali con il significato fisico, rispettivamente, di ampiezza e fase delle oscillazioni. Osserviamo come soluzioni della forma (108) oscillino sempre maggiormente al tendere del parametro ϵ a zero.

E' necessario sostituire la funzione u^ϵ della forma (108) nell'equazione (107). Formalmente, si calcola

$$\begin{aligned} u_t^\epsilon &= a_t^\epsilon e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} + \frac{ip_t^\epsilon}{\epsilon} e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} a^\epsilon \\ &= e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[a_t^\epsilon + \frac{ip_t^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon \right], \\ u_{tt}^\epsilon &= \frac{ip_{tt}^\epsilon}{\epsilon} e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[a_t^\epsilon + \frac{ip_t^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon \right] + e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[a_{tt}^\epsilon + \frac{ip_{tt}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon + \frac{ip_t^\epsilon}{\epsilon} a_t^\epsilon \right] \\ &= e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[\frac{ip_{tt}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \left(\frac{p_t^\epsilon}{\epsilon} \right)^2 a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} p_t^\epsilon a_t^\epsilon + a_{tt}^\epsilon \right]. \end{aligned}$$

Il calcolo delle quantitá $u_{x_i}^\epsilon$, per ogni $i = 1, \dots, n$, é identico al precedente. Sommando su i si ottiene

$$\Delta u^\epsilon = e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[\frac{i\Delta p^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \frac{|\nabla_x p^\epsilon|^2}{\epsilon^2} a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla a^\epsilon + \Delta a^\epsilon \right].$$

Imponendo che u^ϵ sia soluzione dell'equazione (107), si ottiene

$$\left[\frac{ip_{tt}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \left(\frac{p_t^\epsilon}{\epsilon} \right)^2 a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} p_t^\epsilon a_t^\epsilon + a_{tt}^\epsilon \right] - \left[\frac{i\Delta p^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \frac{|\nabla_x p^\epsilon|^2}{\epsilon^2} a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla a^\epsilon + \Delta a^\epsilon \right] = 0,$$

dove $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$. Duque la parte reale del membro a sinistra dell'espressione precedente si deve annullare, per cui si ottiene la condizione

$$a^\epsilon [(p_t^\epsilon)^2 - |\nabla_x p^\epsilon|^2] = \epsilon^2 (a_{tt}^\epsilon - \Delta a^\epsilon). \quad (109)$$

Nell'ipotesi, fisicamente ragionevole, che al tendere del parametro ϵ a zero da destra le funzioni di fase e di ampiezza si stabilizzino, cioè che

$$p^\epsilon \rightarrow p, \quad a^\epsilon \rightarrow a \neq 0, \quad (110)$$

nel senso di qualche spazio di funzioni opportuno, dalla (109) si ricava la condizione

$$(p_t)^2 - |\nabla_x p|^2 = 0,$$

ossia p deve soddisfare una delle equazioni

$$p_t(t, x) \pm |\nabla_x p(t, x)| = 0. \quad (111)$$

L'equazione (111) é di tipo Hamilton-Jacobi e può essere affrontata con le tecniche utilizzate negli esempi precedenti.

Seguono alcune osservazioni.

Osservazione 18. *Le due equazioni (111) determinano diversi comportamenti della soluzione di (107). E' evidente che la funzione p ha derivata temporale positiva nel caso risolva l'equazione (111) con il segno negativo, negativa viceversa. Visto in modo informale, dal punto di vista fisico ciò può rappresentare un fronte d'onda che avanza o regredisce nel tempo.*

Osservazione 19. *Le curve caratteristiche dell'equazione (111), come si vedrà nel seguito, sono linee rette. Fisicamente esse possono essere interpretate come i raggi lungo i quali la famiglia di soluzioni oscillanti della forma (108) si concentra per $\epsilon \rightarrow 0^+$ verso la frequenza stabilizzante.*

L'esempio precedente sull'operatore di D'Alembert può essere generalizzato ad un operatore differenziale della forma

$$L = \partial_{tt}^2 - \sum_{k,h=1}^n a^{kh}(x) \partial_{x_h x_k}^2, \quad (112)$$

dove i coefficienti $a^{kh}(x)$ sono funzioni reali. Nell'ipotesi di simmetria di tali coefficienti, l'equazione

$$Lu = 0 \quad (113)$$

é di tipo iperbolico e generalizza l'equazione delle onde. E' lecito, quindi, studiarne, come fatto per quest'ultima, soluzioni della forma (108) e ripetere le considerazioni fatte sopra. Il calcolo é analogo a quello fatto in precedenza. Si ha

$$\begin{aligned} u_{x_h}^\epsilon &= a_{x_h}^\epsilon e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} + \frac{ip_{x_h}^\epsilon}{\epsilon} e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} a^\epsilon \\ &= e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[a_{x_h}^\epsilon + \frac{ip_{x_h}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon \right], \\ u_{x_h x_k}^\epsilon &= \frac{ip_{x_k}^\epsilon}{\epsilon} e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[a_{x_h}^\epsilon + \frac{ip_{x_h}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon \right] + e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[a_{x_h x_k}^\epsilon + \frac{ip_{x_h x_k}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon + \frac{ip_{x_h}^\epsilon}{\epsilon} a_{x_k}^\epsilon \right] \\ &= e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[\frac{ip_{x_h x_k}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \frac{p_{x_k}^\epsilon p_{x_h}^\epsilon}{\epsilon^2} a^\epsilon + \frac{i}{\epsilon} p_{x_k}^\epsilon a_{x_h}^\epsilon + \frac{i}{\epsilon} p_{x_h}^\epsilon a_{x_k}^\epsilon - a_{x_k x_h}^\epsilon \right]. \end{aligned}$$

Sommando e sfruttando la simmetria dei coefficienti a^{kh} si ottiene

$$\sum_{k,h=1}^n a^{kh}(x) u_{x_h x_k}^\epsilon = e^{\frac{ip^\epsilon}{\epsilon}} \left[\sum_{k,h=1}^n a^{kh} \left(\frac{ip_{x_h x_k}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \frac{p_{x_k}^\epsilon p_{x_h}^\epsilon}{\epsilon^2} a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} p_{x_k}^\epsilon a_{x_h}^\epsilon - a_{x_k x_h}^\epsilon \right) \right].$$

Se u^ϵ soddisfa l'equazione (113) si ha che

$$\left[\frac{ip_{tt}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \left(\frac{p_t^\epsilon}{\epsilon} \right)^2 a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} p_t^\epsilon a_t^\epsilon + a_{tt}^\epsilon \right] - \left[\sum_{k,h=1}^n a^{kh} \left(\frac{ip_{x_h x_k}^\epsilon}{\epsilon} a^\epsilon - \frac{p_{x_k}^\epsilon p_{x_h}^\epsilon}{\epsilon^2} a^\epsilon + \frac{2i}{\epsilon} p_{x_k}^\epsilon a_{x_h}^\epsilon - a_{x_k x_h}^\epsilon \right) \right] = 0.$$

Prendendo la parte reale del membro a sinistra dell'espressione precedente, si ottiene la condizione

$$a^\epsilon \left[(p_t^\epsilon)^2 - \sum_{k,h=1}^n a^{kh} p_{x_k}^\epsilon p_{x_h}^\epsilon \right] = \epsilon^2 \left(a_{tt}^\epsilon - \sum_{k,h=1}^n a^{kh} a_{x_k x_h}^\epsilon \right). \quad (114)$$

Nelle ipotesi (110), si conclude che p deve soddisfare una delle equazioni di tipo Hamilton-Jacobi

$$p_t(t, x) \pm \left(\sum_{k,h=1}^n a^{kh} p_{x_k} p_{x_h} \right)^{1/2} = 0, \quad (115)$$

per le quali valgono le stesse considerazioni fatte sulle (111).

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [2] G. Barles. *Solutions de Viscosité des Équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] E.N. Barron, R. Jensen. *Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians*. Comm. PDE 15, N.12 (1990), 1173-1742.
- [4] P. Cannarsa, C. Sinestrari. *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control*. Birkhäuser, Boston, 2004.
- [5] I. Capuzzo Dolcetta. *Representations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Progr. Nonlinear Diff. Eq. Appl. 54, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [6] M.G. Crandall, L.C. Evans, P.L. Lions. *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Am. Mat. Soc. 282 (1984), 487-502.
- [7] M.G. Crandall, P.L. Lions. *Viscosity solutions of Hamiltonian-Jacobi equations*. Trans. Am. Math. Soc. 277 (1983), 1-42.
- [8] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Am. Math. Soc., Providence RI, 1988.
- [9] E. Hopf. *Generalized solutions of non-linear equations of first order*. J. Math. Mech. 14 (1965), 951-973.
- [10] P.L. Lions. *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Research Notes in Mathematics 69, Pitman, 1982.
- [11] S.R.S. Varadhan. *Diffusion Processes in a Small Time Interval*. Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 659-685.
- [12] S.R.S. Varadhan. *Large Deviations and Applications*. Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia PA, 1984.