

Soluzioni di Viscosità

Italo Capuzzo Dolcetta

Dipartimento di Matematica, Università di Roma - La Sapienza

1 Introduzione

Questo articolo è dedicato ad una rassegna di alcuni aspetti della teoria delle soluzioni di viscosità di equazioni alle derivate parziali del tipo

$$(E) \quad F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

dove F è una funzione scalare di $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$, un aperto di \mathbb{R}^N , della funzione scalare incognita u , del suo gradiente $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$ e della sua matrice Hessiana $D^2u = (u_{x_i x_j})$.

Tale teoria, iniziata nei primi anni '80 da M.G. Crandall e P.L. Lions [32] (vedi anche [33], [60], [59], [34]) ha avuto in seguito un grande sviluppo sia per la ampia generalità in cui è stato possibile stabilire risultati di esistenza, unicità, stabilità, comportamento asintotico e approssimazione di tali soluzioni generalizzate sia per la varietà e l'importanza delle sue applicazioni a problemi nonlineari della teoria del controllo, del trattamento delle immagini, del moto di fronti, delle transizioni di fase e della finanza matematica (vedi, su quest'ultimo aspetto, il contributo [58] di P.L. Lions al XVI Congresso UMI).

Non essendo ovviamente possibile raggiungere nello spazio di questo articolo un obiettivo di completezza della presentazione, ho preferito selezionare alcuni argomenti di rilievo e/o oggetto di ricerca recente tra quelli sopra elencati e riportare nella bibliografia una scelta piuttosto ampia di lavori o libri pertinenti. Nella vasta letteratura in materia sono disponibili numerosi articoli di rassegna e monografie riguardanti i vari aspetti della teoria delle soluzioni viscosità tra i quali segnalo [31], [14], [50], [60], [17], [46], [9], [20].

Segnalo altresì che la teoria è stata sviluppata anche in contesti più generali di quello scelto come ambito per questa rassegna: rinvio ai lavori [35], [36] per il caso di equazioni in spazi di Banach ed a [61] per quello di equazioni stocastiche.

Il testo essendo rivolto ad un pubblico di matematici non specialisti ho scelto in qualche caso di esemplificare alcune metodologie tipiche della teoria in un contesto di minore generalità per evitare eccessivi tecnicismi nella presentazione; per complementi il lettore è rinvio agli articoli originali citati in bibliografia.

2 Equazioni ellittiche degeneri

La teoria delle soluzioni viscosità riguarda equazioni del tipo (E) definite da una funzione *continua*

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N \rightarrow \mathbb{R}$$

(con S^N si denota l'insieme delle matrici simmetriche $N \times N$) che verifichi le seguenti proprietà di *monotonia*:

$$(H1) \quad F(x, s, p, X) \leq F(x, r, p, X) \quad \forall s, r \in \mathbb{R}, s \leq r,$$

$$(H2) \quad F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y), \quad \forall X, Y \in S^N, Y \leq X.$$

Nella (H1) il simbolo \leq denota l'usuale relazione d'ordine tra numeri reali mentre in (H2) e nel seguito la notazione $Y \leq X$ indica che la matrice simmetrica $X - Y$ è semidefinita positiva. Seguendo la terminologia di [31], una funzione F si dice *ellittica degenera* se verifica (H2) e *propria* se soddisfa (H1) e (H2).

Osserviamo che la disuguaglianza in (H2) è verificata in particolare da ogni F indipendente da X ; questo caso completamente degenera che corrisponde alle equazioni del prim'ordine di tipo Hamilton–Jacobi

$$(HJ) \quad F(x, u(x), Du(x)) = 0$$

è trattato nella Sezione 2. Una condizione più forte di (H2) è quella di *ellitticità uniforme* di F , i.e. esistono numeri reali $0 < \lambda \leq \Lambda$ tali che

$$(H3) \quad -\Lambda \text{tr}(X - Y) \leq F(x, r, p, X) - F(x, r, p, Y) \leq -\lambda \text{tr}(X - Y)$$

per ogni $X, Y \in S^N, Y \leq X$. Nel seguito si supporrà sempre che la funzione F sia continua nel complesso delle variabili e verifichi le condizioni (H1) e (H2).

Una teoria di soluzioni generalizzate dell'equazione (E) (o di sistemi di tali equazioni) in differenti ipotesi strutturali su F è stata recentemente sviluppata da B. Dacorogna e P. Marcellini [39].

Alcuni esempi importanti di F proprie sono i seguenti:

Esempio 1.1 : gli operatori di Bellman–Isaacs

Consideriamo le funzioni $F_{\alpha,\beta}$ definite da

$$F_{\alpha,\beta}(x, r, p, X) = -\text{tr}(\sigma_{\alpha,\beta}(x)\sigma_{\alpha,\beta}^*(x)X) - b_{\alpha,\beta}(x) \cdot p + c_{\alpha,\beta}(x)r - f_{\alpha,\beta}(x)$$

con $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$, \mathcal{A} e \mathcal{B} insiemi arbitrari di indici. Se $c_{\alpha,\beta} \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ e per ogni $\beta \in \mathcal{B}$, allora $F_{\alpha,\beta}$ è propria qualunque siano la matrice $\sigma_{\alpha,\beta}(x)$ di tipo $N \times M$, il campo di vettori $b_{\alpha,\beta}$ e la funzione $f_{\alpha,\beta}$.

Si osservi che la condizione ($H2$) è implicata dal fatto che $\sigma_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha,\beta}^* \geq 0$ (con $*$ si denota la trasposizione) mentre ($H1$) è un'ovvia conseguenza dell'ipotesi $c_{\alpha,\beta} \geq 0$.

Non è difficile verificare allora che anche

$$F(x, r, p, X) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\beta \in \mathcal{B}} F_{\alpha,\beta}(x, r, p, X)$$

è propria se tutte le $F_{\alpha,\beta}$ lo sono. L'equazione (E) è conosciuta in questo caso come equazione di Bellman–Isaacs ed è di fondamentale importanza nella teoria dei giochi differenziali per processi di diffusione possibilmente degeneri. Un caso particolare di rilievo è quello in cui

$$F(x, r, p, X) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} [-\text{tr}(\sigma_{\alpha}(x)\sigma_{\alpha}^*(x)X) - b_{\alpha}(x) \cdot p + c_{\alpha}(x)r - f_{\alpha}(x)].$$

In questo caso, che comprende ovviamente a sua volta quello delle equazioni lineari del secondo ordine con forma caratteristica non negativa e struttura non divergenziale (vedi in proposito [63],[45]), la funzione $X \rightarrow F(x, r, p, X)$ è convessa e si presenta nell'approccio col metodo della Programmazione Dinamica a problemi di controllo ottimo e di finanza matematica (vedi [59],[46] e [58]).

Il caso completamente degenero $\sigma_{\alpha}(x) \equiv 0$, i.e.

$$F(x, r, p) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} [-b_{\alpha}(x) \cdot p + c_{\alpha}(x)r - f_{\alpha}(x)],$$

dà luogo ad una classe importante di equazioni di Hamilton–Jacobi che intervengono nel calcolo delle variazioni, nel controllo ottimo deterministico ed in questioni di grandi deviazioni (vedi [60],[17],[9]).

Si osservi a tale proposito che, scegliendo

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in R^N : |\alpha| \leq 1\}, b_\alpha(x) \equiv \alpha, c_\alpha(x) \equiv 0, f_\alpha(x) \equiv 1,$$

si ottiene $F(x, r, p) = |p| - 1$ e quindi l'equazione (E) si riduce alla classica equazione eiconale dell'ottica geometrica $|Du(x)| = 1$.

Esempio 1.2 : gli operatori estremali di Pucci

Gli operatori estremali di Pucci $M_{\lambda,\Lambda}^-$ e $M_{\lambda,\Lambda}^+$ sono definiti da

$$M_{\lambda,\Lambda}^-(X) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} [-\text{tr}AX] \quad M_{\lambda,\Lambda}^+(X) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} [-\text{tr}AX]$$

dove

$$\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda} = \{A \in S^N : \lambda|\xi|^2 \leq A\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2, \forall \xi \in R^N\}.$$

e $0 < \lambda \leq \Lambda$. Si noti che $M_{\lambda,\Lambda}^- \leq F \leq M_{\lambda,\Lambda}^+$ per ogni $F = F(X)$ verificante (H3) e $F(0) = 0$.

Esempio 1.3: il moto secondo curvatura

L'equazione di evoluzione

$$(MCM) \quad u_t - |Du| \text{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = 0$$

può essere scritta nella forma $u_t + F(t, x, Du, D^2u) = 0$ tramite la funzione

$$F(p, X) = -\text{tr} \left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right).$$

Essendo $I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \geq 0$ per ogni $p \in R^N / \{0\}$, la funzione F risulta ellittica degenera su $R^N / \{0\} \times S^N$.

L'equazione (MCM), insieme con una condizione iniziale, descrive l'evoluzione di una ipersuperficie di \mathbb{R}^N , data come insieme di livello del dato iniziale, con un moto diretto secondo la

normale con velocità proporzionale alla curvatura media. La teoria delle soluzioni viscosità è stata utilizzata per dare una interpretazione globale di tale equazione nei fondamentali lavori sull'esistenza globale e l'unicità di Chen-Giga-Goto ed Evans-Spruck [30],[40].

Esempio 1.4: l' equazione di Perona-Malik

Un esempio di equazione propria che descrive una diffusione anisotropa in trattamento di immagini introdotta da Perona - Malik e studiata tramite la teoria delle soluzioni viscosità in [29] è

$$u_t = \frac{g'(|Du|)}{|Du|} D^2 u Du \cdot Du + g(|Du|) \Delta u ,$$

dove $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione positiva tale che

$$g(0) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0, \quad (sg(s))' \geq 0 .$$

Sotto queste condizioni la funzione

$$F(p, X) = -\frac{g'(|p|)}{|p|} Xp \cdot p - g(|p|) \text{tr} X$$

è propria.

3 Equazioni di Hamilton - Jacobi

Come è stato ricordato nella Introduzione, la nozione di soluzione viscosità è stata originariamente introdotta da M.G. Crandall e P.L. Lions nel caso di equazioni del primo ordine del tipo

$$(HJ) \quad F(x, u(x), Du(x)) = 0 .$$

In questo paragrafo, dopo avere presentato la nozione in questo caso più semplice e averne giustificato la denominazione con riferimento al classico metodo di viscosità evanescente, ne mostriamo l'importanza attraverso un risultato che caratterizza la funzione distanza da un arbitrario insieme chiuso di \mathbb{R}^N come unica soluzione di viscosità del problema di Dirichlet per l'equazione eiconale.

3.1 Un semplice esempio unidimensionale

Da un punto di vista introduttivo è utile considerare il seguente semplicissimo problema di Dirichlet unidimensionale:

$$|u'(x)| = 1, x \in I \equiv (-1, 1) \quad (1)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (2)$$

E' immediato osservare che il teorema di Rolle costituisce una ostruzione alla risolubilità di (1), (2) in $C^1(I) \cap C^0(\bar{I})$.

Una strategia naturale verso l'esistenza di soluzioni di questo problema è quella di richiedere che l'equazione sia soddisfatta quasi ovunque in I e non in tutti i punti; la via di definire soluzioni deboli del problema tramite integrazione per parti è infatti impraticabile perchè l'equazione è nonlineare nella derivata di ordine massimo. Ciò porta ad ambientare il problema anzichè in $C^1(I)$ nel più ampio spazio $\text{Lip}_{\text{loc}}(I)$ delle funzioni localmente lipschitziane: il classico Teorema di Rademacher garantisce infatti la differenziabilità quasi ovunque di tali funzioni.

In questo ambito l'esistenza di soluzioni è evidente ma la controparte è che le desiderabili proprietà di unicità e di stabilità della soluzione vengono a mancare.

Infatti, è immediato verificare che le funzioni di Rademacher definite da

$$u_k(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}} & \text{se } x \in \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{2i+1}{2^k}\right) \\ -x - 1 + \frac{i+1}{2^{k-1}} & \text{se } x \in \left[-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}\right) \end{cases} \quad x \in I_i^{(k)}$$

dove gli intervalli $I_i^{(k)} = \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}\right)$ ($k = 0, 1, \dots$) costituiscono una partizione di $[-1, 1)$, i.e. $[-1, 1) = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} I_i^{(k)}$, sono tutte soluzioni quasi ovunque di (1), (2) e, per $k \rightarrow +\infty$, convergono uniformemente alla funzione nulla che ovviamente non verifica (1) in nessun punto.

La strategia proposta da Crandall, Evans e Lions (vedi [32], [34]) consiste nel testare puntualmente una candidata soluzione u da sotto e da sopra con funzioni regolari. Più precisamente, se $u \in C(\bar{I})$ e fissato un arbitrario $x \in I$ si considerano funzioni $\varphi, \psi \in C^1(I)$ tali che

$$u(x) = \varphi(x) = \psi(x); \quad \psi(y) \leq u(y) \leq \varphi(y) \text{ per } y \text{ in un intorno di } x. \quad (3)$$

Le funzioni φ, ψ vengono dette, rispettivamente, *sopratangente* e *sottotangente* (locali) a u in x . Calcoli elementari mostrano che se si sceglie

$$u(x) = 1 - |x| = \text{dist}(x, I^c)$$

si ha

$$|\varphi'(x)| \leq 1 \leq |\psi'(x)| \quad (4)$$

per ogni $x \in I$, per ogni φ sopratangente a u in x e per ogni ψ sottotangente a u in x (si noti che in $x = 0$ la funzione u non ammette alcuna funzione sottotangente). E' facile convincersi che nessun'altra delle soluzioni quasi ovunque di (1) sopra segnalate verifica tale proprietà e che, fatto a prima vista sorprendente, la funzione $-u$ non verifica le disuguaglianze (4).

Non è affatto ovvio invece il risultato (vedi il seguente Teorema (3.1)) che la funzione $u(x) = \text{dist}(x, I^c)$ sia l'*unica* tra tutte le funzioni di $C(\bar{I})$ nulle al bordo a verificare le disuguaglianze (4).

3.2 Semitangenti e semidifferenziali

Consideriamo adesso la generale equazione del prim'ordine

$$(HJ) \quad F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \quad ,$$

osservando esplicitamente che equazioni di evoluzione del tipo

$$u_t + H(x, t, u(x, t), D_x u(x, t)) = 0$$

si possono riscrivere nella forma (HJ) ponendo $y = (x, t)$ e

$$F(y, r, q_1, \dots, q_N, q_{N+1}) = q_{N+1} + H(x, r, q_1, \dots, q_N).$$

Seguendo l'idea delineata nella Sezione 3.1, diciamo che una funzione $u \in C(\Omega)$ è una *soluzione viscosità* di (HJ) se per ogni $x \in \Omega$, per ogni φ sopratangente e per ogni ψ sottotangente a u in x si ha:

$$F(x, u(x), D\varphi(x)) \leq 0 \leq F(x, u(x), D\psi(x)) \quad (5)$$

Una funzione $u \in C(\Omega)$ si dice *sottosoluzione viscosità* di (HJ) se per ogni $x \in \Omega$ e per ogni φ sopratangente a u in x vale la disuguaglianza di sinistra in (5); analogamente, u è una

soprasoluzione viscosità di (HJ) se per ogni $x \in \Omega$ e per ogni ψ sottotangente a u in x è soddisfatta la disuguaglianza di destra in (5).

Una forma equivalente di queste definizioni si basa sulla nozione di *semidifferenziale* di una funzione continua. Per $u \in C(\Omega)$ e $x \in \Omega$ si considerano gli insiemi

$$D^+u(x) = \{p \in \mathbb{R}^N : u(y) \leq u(x) + p \cdot (y - x) + o(|x - y|), \text{ per } y \rightarrow x\}$$

$$D^-u(x) = \{q \in \mathbb{R}^N : u(y) \geq u(x) + q \cdot (y - x) + o(|x - y|), \text{ per } y \rightarrow x\}$$

detti, rispettivamente, *sopra* e *sottodifferenziale* di u in x .

I semidifferenziali di una funzione continua u hanno le seguenti proprietà elementari:

- (i) $D^+u(x)$ e $D^-u(x)$ sono insiemi convessi (eventualmente vuoti) per ogni $x \in \Omega$;
- (ii) $\{x \in \Omega : D^+u(x) \neq \emptyset\}$ e $\{x \in \Omega : D^-u(x) \neq \emptyset\}$ sono insiemi densi in Ω ;
- (iii) se u è differenziabile in x , allora $D^+u(x) = D^-u(x) = Du(x)$;
- (iv) se $D^+u(x) \neq \emptyset$ e $D^-u(x) \neq \emptyset$, allora u è differenziabile in x .

Inoltre, i semidifferenziali si possono rappresentare in termini delle funzioni sotto e sopratangenti a u in x . Si può dimostrare infatti che

$$D^+u(x) = \{p \in \mathbb{R}^N : p = D\varphi(x), \varphi \in C^1(\Omega) \text{ sopratangente a } u \text{ in } x\}$$

$$D^-u(x) = \{q \in \mathbb{R}^N : q = D\psi(x), \psi \in C^1(\Omega) \text{ sottotangente a } u \text{ in } x\}$$

Da queste formule di rappresentazione si deduce immediatamente che $u \in C(\Omega)$ è soluzione viscosità di (HJ) se e solo se

$$F(x, u(x), p) \leq 0 \leq F(x, u(x), q)$$

per ogni $x \in \Omega$ e $(p, q) \in D^+u(x) \times D^-u(x)$.

Si vede quindi facilmente che la nozione di soluzione viscosità è locale e inoltre che è consistente con la nozione di soluzione classica e che la generalizza. Infatti, a partire dalle proprietà (iii) e (iv) dei semidifferenziali, si deduce che se $u \in C^1(\Omega)$ verifica (HJ) in tutti i punti di Ω

allora u è una soluzione viscosità di (HJ) e, d' altra parte, che se $u \in C^1(\Omega)$ soddisfa (HJ) in senso di viscosità allora u soddisfa l'equazione anche in senso classico.

Un altro fatto interessante da notare è che se u è una sottosoluzione viscosità di (HJ) , allora la validità della disuguaglianza stretta

$$F(x, \varphi(x), D\varphi(x)) > 0 \quad (6)$$

per ogni $x \in \Omega'$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega')$, implica che $u - \varphi$ non può avere massimo non negativo in Ω' . Tale proprietà ricorda nella sua formulazione il Principio di Massimo per le sottosoluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine.

Nel prossimo paragrafo viene discusso, da un differente punto di vista, il ruolo del Principio di Massimo in connessione alla nozione di soluzione viscosità (vedi anche [10] e [11] per alcuni recenti risultati relativi alla propagazione dei massimi ed al Principio di Massimo forte).

3.3 Il metodo della viscosità evanescente

Consideriamo il seguente problema di perturbazione singolare associato in modo naturale alla equazione (HJ)

$$-\epsilon \Delta u_\epsilon + F(x, u_\epsilon(x), Du_\epsilon(x)) \leq 0, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

con $\epsilon > 0$. Sia $u_\epsilon \in C^2(\Omega)$ una funzione verificante (7) e si supponga di sapere che

$$u_\epsilon \rightarrow u \in C(\Omega), \quad \text{localmente uniformemente per } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Non è difficile dedurre da ciò che la funzione limite u verifica in senso di viscosità la disuguaglianza

$$F(x, u(x), Du(x)) \leq 0.$$

Infatti, se $\varphi \in C^2(\Omega)$ e x è un punto di massimo relativo stretto di $u - \varphi$, per proprietà elementari della convergenza uniforme esistono punti x_ϵ di massimo relativo per $u_\epsilon - \varphi$ tali che

$$x_\epsilon \rightarrow x, \quad u_\epsilon(x_\epsilon) \rightarrow u(x) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Dalle condizioni di ottimalità del secondo ordine ne segue che

$$D(u_\epsilon - \varphi)(x_\epsilon) = 0, \quad -\epsilon \Delta(u_\epsilon - \varphi)(x_\epsilon) \geq 0$$

e quindi (7) implica che

$$-\epsilon \Delta \varphi(x_\epsilon) + F(x_\epsilon, u_\epsilon(x_\epsilon), D\varphi(x_\epsilon)) \leq 0. \quad (8)$$

Se F è continua, passando al limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ in (8), si conclude che

$$F(x, u(x), D\varphi(x)) \leq 0 ,$$

e cioè che u è sottosoluzione viscosità di (HJ) . Analoghe considerazioni si possono naturalmente fare per le soprasoluzioni. Per complementi e stime sulla rapidità di convergenza del metodo di viscosità evanescente vedi ad esempio [60], [9].

La discussione di cui sopra, oltre a fornire una giustificazione alla qualificazione di *viscosità* attribuita alle soluzioni generalizzate considerate, offre un altro punto di vista su tale nozione di soluzione generalizzata: questa può essere interpretata come il risultato di un passaggio al limite in convergenza uniforme in una espressione non lineare coinvolgente le derivate.

3.4 La funzione distanza e l'equazione eiconale

Come prima applicazione della nozione di soluzione viscosità consideriamo l'esempio basilare della *equazione eiconale*

$$|Du(x)| = 1 . \tag{9}$$

Sia d la funzione distanza da un sottoinsieme non vuoto arbitrario S di \mathbb{R}^N , i.e.

$$d(x) = \inf_{z \in S} |x - z| \tag{10}$$

E' ben noto che se ∂S è regolare, per esempio di classe C^2 , allora d è differenziabile in un intorno I sufficientemente piccolo di ∂S e verifica in senso classico l'equazione eiconale

$$|Du(x)| = 1 , \quad x \in I. \tag{11}$$

Ovviamente l'equazione (11) non è sufficiente a individuare univocamente d , anche per mancanza di informazione sui valori di d su ∂I dato che tale intorno non è facilmente determinabile a priori. D'altra parte, esistono in generale punti $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{S}$ tali che

$$d(x) = |x - z_1| = |x - z_2|$$

con $z_1, z_2 \in \partial S, z_1 \neq z_2$ e in tali punti d non è differenziabile.

La nozione di soluzione viscosità consente di interpretare globalmente l'equazione (11) in $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{S}$ e di selezionare d come l' unica sua soluzione verificante le appropriate condizioni di Dirichlet al bordo. Nel caso che Ω sia limitato si ha infatti il seguente:

Teorema 3.1 *Se $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{S}$ è limitato, allora d è l'unica soluzione viscosità del problema di Dirichlet*

$$|Du| = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (12)$$

La dimostrazione di questo risultato mette bene in luce alcuni aspetti e tecniche tipiche della teoria; la presentiamo dunque in un certo dettaglio. Un facile calcolo diretto mostra innanzitutto che $d \in C(\overline{\Omega})$. Per verificare poi che d è soluzione viscosità di (12) si considera, per x fissato in Ω , l'insieme

$$P(x) = \{z \in \partial S : d(x) = |x - z|\}$$

Con argomenti piuttosto elementari di analisi convessa si può dimostrare che

$$D^+d(x) = \overline{\text{co}} \left\{ \frac{x - z}{|x - z|}, z \in P(x) \right\}$$

(con $\overline{\text{co}}$ si denota la chiusura dell'involucro convesso) e che

$$D^-d(x) = \begin{cases} \frac{x - P(x)}{|x - P(x)|} & \text{se } \text{card } P(x) > 1 \\ \emptyset & \text{se } \text{card } P(x) = 1 \end{cases}$$

Da ciò segue immediatamente che d è soluzione viscosità di (12).

L'unicità della soluzione viscosità è conseguenza del fatto che l'equazione eiconale soddisfa il seguente *Principio di Confronto*:

se $u_i \in C(\overline{\Omega})$ ($i = 1, 2$) verificano

$$|Du_1| \leq 1 \leq |Du_2| \quad \text{in senso di viscosità in } \Omega \quad \text{e} \quad u_1 \leq u_2 \quad \text{su } \partial\Omega \quad (13)$$

allora

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{in } \Omega. \quad (14)$$

Osserviamo esplicitamente che tale principio di confronto non vale per soluzioni quasi ovunque (si riveda la Figura 1 nella Sezione 3.1).

Per dimostrare la validità del principio di confronto si considera la combinazione convessa

$$u_t(x) = tu_1(x) + (1 - t) \min_{\overline{\Omega}} u_1, \quad t \in [0, 1],$$

e si verifica facilmente che

$$u_t \leq u_1, \quad u_t \rightarrow u_1 \quad \text{uniformemente per } t \rightarrow 1, \\ D^+ u_t(x) = t D^+ u_1(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (15)$$

Da quest' ultima e da (13) segue che u_t verifica in senso viscosità

$$|D^+ u_t(x)| \leq t < 1, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in \Omega. \quad (16)$$

Mostriamo ora che questa disuguaglianza stretta implica

$$u_t(x) \leq u_2(x), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in \Omega, \quad (17)$$

da cui segue la tesi passando al limite per $t \rightarrow 1$.

Per dimostrare (17) si suppone per assurdo che

$$\exists \bar{t} \in (0, 1) : \max_{\bar{\Omega}} (u_{\bar{t}} - u_2) = (u_{\bar{t}} - u_2)(\bar{x}) = \delta > 0.$$

Si considera poi per $\epsilon > 0$ la funzione ausiliaria

$$\Phi_\epsilon(x, y) = u_{\bar{t}}(x) - u_2(y) - \frac{|x - y|^2}{2\epsilon}$$

e un suo punto di massimo (x_ϵ, y_ϵ) su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Si ha ovviamente

$$\Phi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \Phi_\epsilon(\bar{x}, \bar{x}) = \delta > 0,$$

e con qualche semplice considerazione se ne deduce la stima

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| \leq C\sqrt{\epsilon}. \quad (18)$$

Supponiamo ora che $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \Omega \times \Omega$ per ogni ϵ sufficientemente piccolo. Dato che x_ϵ è un punto di massimo per $x \rightarrow u_{\bar{t}}(x) - u_2(y_\epsilon) - \frac{|x - y_\epsilon|^2}{2\epsilon}$ e che $x \rightarrow u_2(y_\epsilon) + \frac{|x - y_\epsilon|^2}{2\epsilon}$ è di classe C^1 , se ne deduce

$$0 \in D^+ u_{\bar{t}}(x_\epsilon) - D_x \left(u_2(y_\epsilon) + \frac{|x - y_\epsilon|^2}{2\epsilon} \right),$$

ovvero che

$$\frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon} \in D^+ u_{\bar{t}}(x_\epsilon).$$

In maniera analoga si dimostra che

$$\frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon} \in D^- u_2(y_\epsilon).$$

Dalla disuguaglianza (16) e dall'ipotesi che u_2 è una soprasoluzione si ottiene dunque la contraddizione

$$1 \leq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon} \leq \bar{t} < 1$$

che prova (17) in questo caso.

Resta da esaminare la possibilità che per ogni ϵ uno tra i punti x_ϵ, y_ϵ appartenga a $\partial\Omega$. Supponiamo che sia $x_\epsilon \in \partial\Omega$; per compattezza e tenendo conto di (18) si ha che $(x_\epsilon, y_\epsilon) \rightarrow (x^*, x^*) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

La disuguaglianza $\Phi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \Phi_\epsilon(x, x)$ implica dunque

$$u_t(x_\epsilon) - u_2(y_\epsilon) \geq u_t(x) - u_2(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Passando al limite in questa per $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$u_t(x) - u_2(x) \leq u_t(x^*) - u_2(x^*) \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

e quindi facendo tendere t a 1 si stabilisce la validità di (17) anche in questo caso.

4 Equazioni ellittiche degeneri

La definizione di soluzione viscosità per l'equazione generale

$$(E) \quad F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0, \quad x \in \Omega,$$

è la naturale estensione di quella data per equazioni di Hamilton–Jacobi nel paragrafo precedente. Le sopratangenti e sottotangenti a u in x in questo caso sono funzioni φ, ψ di classe $C^2(\Omega)$ verificanti $u(x) = \varphi(x) = \psi(x)$ e $\psi(y) \leq u(y) \leq \varphi(y)$ per y in un intorno di x .

Dunque, una funzione $u \in C(\Omega)$ è *soluzione viscosità* di (E) se

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0 \leq F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \quad (1)$$

per ogni $x \in \Omega$, per ogni φ sopratangente e per ogni ψ sottotangente a u in x .

Una funzione $u \in C(\Omega)$ è *sottosoluzione viscosità* di (E) se verifica la disuguaglianza di sinistra in (1), una *soprasoluzione viscosità* se verifica la disuguaglianza di destra. In vari aspetti della teoria è conveniente indebolire le definizioni di sotto e sopra soluzione richiedendo che

le prime siano funzioni semicontinue superiormente e le seconde siano semicontinue inferiormente in Ω ; denoteremo gli insiemi di tali funzioni con $SCS(\Omega)$ e $SCI(\Omega)$. Ovviamente ciò non modifica la definizione di soluzione viscosità .

In maniera analoga a quanto visto nella Sezione 2, diciamo che una coppia $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times S^N$ è nel superdifferenziale del secondo ordine di u in x se

$$u(y) \leq u(x) + p \cdot (y - x) + \frac{1}{2}X(y - x) \cdot (y - x) + o(|x - y|^2) \text{ per } y \rightarrow x$$

e, similmente, che $(q, Y) \in \mathbb{R}^N \times S^N$ è nel sottodifferenziale del secondo ordine di u in x se

$$u(y) \geq u(x) + q \cdot (y - x) + \frac{1}{2}Y(y - x) \cdot (y - x) + o(|x - y|^2) \text{ per } y \rightarrow x .$$

Denotando rispettivamente con $D^{2+}u(x)$ e $D^{2-}u(x)$ gli insiemi definiti da tali disuguaglianze, si possono anche in questo caso dimostrare loro proprietà del tipo di quelle indicate nella Sezione 2.2 e, in particolare, le analoghe formule di rappresentazione:

$$D^{2+}u(x) = \{(D\varphi(x), D^2\varphi(x)) , \varphi \in C^2(\Omega) \text{ sopratangente a } u \text{ in } x\}$$

$$D^{2-}u(x) = \{(D\varphi(x), D^2\varphi(x)) , \varphi \in C^2(\Omega) \text{ sottotangente a } u \text{ in } x\} .$$

In questi termini, una soluzione viscosità di (E) è una funzione $u \in C(\Omega)$ tale che

$$F(x, u(x), p, X) \leq 0 \leq F(x, u(x), q, Y)$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $((p, X), (q, Y)) \in D^{2+}u(x) \times D^{2-}u(x)$.

Notiamo esplicitamente che la definizione data generalizza quella di soluzione classica se F è ellittica degenere. Infatti, se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa puntualmente (E) allora per ogni φ sopratangente e per ogni ψ sottotangente a u in x si ha

$$D\varphi(x) = Du(x) , \quad D^2\varphi(x) \geq D^2u(x) \geq D^2\psi(x)$$

e quindi, grazie ad $(H2)$,

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0 \leq F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) ,$$

i.e. e u soddisfa (E) in senso di viscosità .

Nel caso speciale in cui $F(x, r, p, X) = -\text{tr}X$, l'equazione (E) corrisponde all'equazione di Laplace

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega. \quad (2)$$

In questo caso la nozione di sottosoluzione viscosità coincide con quella classica di funzione subarmonica nel senso della teoria del potenziale (vedremo in seguito altri risultati che mettono in luce come nozione di sottosoluzione viscosità può essere vista come una versione nonlineare di quella di funzione armonica).

Ricordiamo (vedi [48]) che una funzione $u \in SCS(\Omega)$ è *subarmonica* se per ogni sfera chiusa $B \subset \Omega$ e per ogni h con $\Delta h = 0$ in B , la disuguaglianza $u \leq h$ su ∂B implica $u \leq h$ in B . Vale infatti il seguente risultato:

Teorema 4.1 *Una funzione u è sottosoluzione viscosità di (2) se e solo se u è subarmonica in Ω .*

Per la dimostrazione, supponiamo dapprima che u sia una sottosoluzione viscosità di (2); se u non fosse subarmonica allora esisterebbero una sfera chiusa $B \subset \Omega$ e una funzione h armonica in B tali che

$$u - h < 0 \text{ su } \partial B, \quad \sup_B(u - h) > 0.$$

Sia $x_0^\epsilon \in B$ un punto di massimo su B della funzione $x \rightarrow u(x) - h(x) + \epsilon|x|^2$ con $\epsilon > 0$. Si ha

$$u(x) - h(x) + \epsilon|x|^2 < 0 \text{ su } \partial B, \quad \sup_B(u - h) > 0,$$

e quindi $x_0^\epsilon \in \text{int}B$ per ϵ sufficientemente piccolo. Si consideri ora, per un tale ϵ fissato, il polinomio quadratico

$$q(x) = u(x_0^\epsilon) + Dh(x_0^\epsilon) \cdot (x - x_0^\epsilon) + \frac{1}{2}D^2h(x_0^\epsilon)(x - x_0^\epsilon) \cdot (x - x_0^\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon|x - x_0^\epsilon|^2.$$

Un semplice argomento basato sulla formula di Taylor mostra che x_0^ϵ è un massimo relativo per $u - q$; d'altra parte è immediato verificare che $-\Delta q(x) = N\epsilon > 0$ per ogni x . Ciò contraddice l'ipotesi che u fosse una sottosoluzione viscosità di (2) e quindi u è necessariamente subarmonica.

Viceversa, sia u subarmonica e, per assurdo, u non sia sottosoluzione viscosità di (2). Esistono dunque $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ punto di massimo relativo di $u - \varphi$ tali che $-\Delta\varphi(x_0) > 0$. Se ne deduce che il polinomio quadratico

$$q(x) = u(x_0) + D\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}D^2\varphi(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\epsilon|x - x_0|^2$$

verifica

$$u(x_0) = q(x_0) , \Delta q(x) \equiv \Delta \varphi(x_0) + N\epsilon < 0 \quad (3)$$

per ϵ sufficientemente piccolo; inoltre, usando il fatto che x_0 è un massimo relativo di $u - \varphi$, lo sviluppo di Taylor mostra che

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - q(x)}{|x - x_0|^2} \leq -\frac{\epsilon}{2}$$

e quindi che $(u - q)(x) \leq 0$ per ogni x tale che $|x - x_0| = R$, per R sufficientemente piccolo. La funzione $\psi(x) = u(x) - q(x) - \epsilon|x - x_0|^2$ verifica dunque

$$\psi(x_0) = 0 , \psi(x) \leq -\epsilon R^2 \quad \text{for } |x - x_0| = R \quad (4)$$

e quindi non è subarmonica, come si vede scegliendo

$$B = \{x \in \Omega : |x - x_0| \leq R\} , \quad h(x) \equiv -\epsilon R^2 .$$

D'altra parte, usando (3) si deduce immediatamente che $x \rightarrow -q(x) - \epsilon|x - x_0|^2$ è subarmonica in Ω e quindi anche ψ dovrebbe essere tale in quanto somma di funzioni subarmoniche (vedi [48]). Questa contraddizione completa la dimostrazione.

4.1 Principi di confronto e unicità della soluzione

Nella Sezione 2.4 abbiamo illustrato, con riferimento all'equazione eiconale, un primo esempio di teorema di confronto per soluzioni viscosità .

Il rilievo di tale risultato risiede nel fatto che esso mostra l'unicità di soluzioni estremamente deboli di una equazione differenziale (si ricordi che esistono funzioni continue non differenziabili in alcun punto). Quella dei principi di confronto, e dei conseguenti risultati di unicità e stabilità e quelli di esistenza basati sul metodo di Perron (vedi le seguenti sezioni 4.1, 4.2, 4.3), si può considerare dunque come la parte centrale della teoria delle soluzioni viscosità .

Il seguente enunciato è una versione per il problema di Dirichlet su un aperto limitato del fondamentale risultato di confronto dovuto a M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions e R. Jensen. Numerose varianti sono possibili per altri tipi di condizioni al contorno e anche per aperti illimitati con opportune condizioni all'infinito (vedi ad esempio [31],[52] e le relative bibliografie).

Teorema 4.2 *Siano Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N e $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\exists \lambda > 0 : r \rightarrow F(x, r, p, X) - \lambda r \quad \text{è nondecrecente per ogni } x, p, X. \quad (5)$$

Supponiamo inoltre che esista una funzione $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, nondecrecente con $\omega(0) = 0$ e tale che

$$F(y, r, \alpha(x - y), Y) - F(x, r, \alpha(x - y), X) \leq \omega(\alpha|x - y|^2 + |x - y|) \quad (6)$$

per ogni $x, y \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e per ogni coppia di matrici $X, Y \in S^N$ soddisfacenti

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Se $u \in SCS(\bar{\Omega})$, $v \in SCI(\bar{\Omega})$ verificano

$$F(x, u, Du, D^2u) \leq 0 \leq F(x, v, Dv, D^2v) \quad \text{in } \Omega \text{ e } u \leq v \quad \text{su } \partial\Omega,$$

allora $u \leq v$ in Ω e quindi il problema di Dirichlet

$$u \in C(\bar{\Omega}) : F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ in } \Omega, u = g \text{ su } \partial\Omega \quad (8)$$

ha al più una soluzione viscosità.

La condizione (6) implica l'ellitticità degenera (H2); se F non dipende da x allora (H2) implica (6). Nel caso di dipendenza da x la situazione è più complicata: in proposito menzioniamo solo il fatto che (6) è soddisfatta dall'operatore lineare $-\text{tr}(\sigma(x)\sigma^*(x))$ se $\sigma(x) \in S^N$ con dipendenza lipschitziana in x (vedi [31]).

La dimostrazione della proprietà di confronto nel quadro del Teorema 3.1 è assai più complessa di quella delineata nella Sezione 2 per il caso completamente degenera dell'equazione eiconale. Essa si basa in modo cruciale sulla seguente notevole variante semicontinua del Principio di Massimo:

Proposizione 4.1 *Siano $u \in SCS(\bar{\Omega})$ e $v \in SCI(\bar{\Omega})$ e sia $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega \times \Omega$ un massimo relativo per la funzione $u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$, $\alpha > 0$. Allora esistono $X, Y \in S^N$ tali che*

$$\begin{aligned} (\alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) &\in \bar{D}^{2+} u(\hat{x}); \quad (\alpha(\hat{x} - \hat{y}), Y) \in \bar{D}^{2-} v(\hat{y}), \\ \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} &\leq \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dimostrazione di questo enunciato è conseguenza elementare delle condizioni di massimo del secondo ordine se $u, v \in C^2(\Omega)$ ed è invece molto più delicata nel caso generale. Rinvio a [31], [50], [52] per la dimostrazione completa; mi limito qui a menzionare che in essa si utilizzano vari strumenti di analisi nonlineare e reale tra i quali:

- la regolarizzazione per sup-convoluzione (anche detta regolarizzazione di Yosida-Moreau)

$$u^\epsilon(x) := \sup_{y \in \Omega} \left\{ u(y) - \frac{|x - y|^2}{2\epsilon} \right\} ,$$

che consente di approssimare in maniera monotona per $\epsilon \rightarrow 0^+$ una funzione $u \in SCS(\overline{\Omega})$ con funzioni u^ϵ *semiconvesse*, i.e. tali che $u^\epsilon(x) + C^\epsilon|x|^2$ è convessa per $C^\epsilon > 0$ sufficientemente grande;

- il teorema di differenziabilità di Alexandrov, che assicura che per una funzione semiconvessa f gli insiemi $D^{2+}f(x) \cap D^{2-}f(x)$ sono quasi ovunque non vuoti;

- il lemma di perturbazione di R. Jensen, che afferma che se f è semiconvessa ed ha un massimo stretto in $x = 0$, allora l'insieme

$$\{x \in B(0, r) : \exists p \in B(0, r) \text{ tale che } y \rightarrow f(y) - p \cdot y \text{ ha un massimo relativo in } x\}$$

ha misura di Lebesgue positiva per ogni $r > 0$.

Tra i vari risultati recenti delle numerose ricerche connesse con la proprietà di unicità per soluzioni viscosità ci limitiamo a descrivere brevemente quelli di M. Bardi e P. Goatin e R. Jensen e quelli sulla proprietà di Liouville e sul teorema dei tre cerchi di Hadamard di A. Cutri e F. Leoni .

Nei lavori [12], [53] si mostra che l'unicità per il problema di Dirichlet (8) relativo all'operatore di Bellman–Isaacs

$$F_{\alpha, \beta}(x, r, p, X) = -\text{tr}(\sigma_{\alpha, \beta}(x)\sigma_{\alpha, \beta}^*(x)X) - b_{\alpha, \beta}(x) \cdot p + c_{\alpha, \beta}(x)r - f_{\alpha, \beta}(x)$$

considerato nell'Esempio 1.1 è strettamente collegata con il comportamento delle traiettorie delle equazioni differenziali stocastiche controllate associate ad $F_{\alpha, \beta}$ tramite la formula di differenziazione stocastica di Ito. Tali risultati implicano, ad esempio, che il problema lineare

$$-\text{tr}(\sigma(x)\sigma^*(x)D^2u) - b(x) \cdot Du + c(x)u = f(x) \text{ in } \Omega, u = g \text{ su } \partial\Omega,$$

ha un'unica soluzione viscosità se e solo se Ω non ha sottoinsiemi propri invarianti per l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t. \quad (9)$$

Qui B_t è un moto browniano standard e per sottoinsieme invariante di (9) si intende un insieme $K \subseteq \Omega$ tale che $X_t \in K$ per ogni $t > 0$ e per ogni $X_0 \in K$. Sarebbe interessante stabilire caratterizzazioni simili per altre condizioni al contorno.

Nel lavoro [38] le autrici considerano le soluzioni viscosità delle disuguaglianze

$$u \in C(\mathbb{R}^N) : u \geq 0, \quad M_{\lambda, \Lambda}^-(D^2u) \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad (10)$$

dove $M_{\lambda, \Lambda}^-$ è l'operatore minimale di Pucci (vedi Esempio 1.2) e dimostrano che se $N \leq \frac{\Lambda}{\lambda} + 1$ allora ogni soluzione di (10) è necessariamente costante, ed esibiscono soluzioni non banali di (10) se $N > \frac{\Lambda}{\lambda} + 1$. Si noti che questo risultato, apparentemente nuovo anche per soluzioni $C^2(\mathbb{R}^N)$, comprende come caso particolare il classico risultato di Liouville per le funzioni superarmoniche.

La sua dimostrazione è basata sul fatto che la funzione $r \rightarrow \min_{|x|=r} u(x)$ è concava rispetto a $\log r$ se $N = \frac{\Lambda}{\lambda} + 1$ e rispetto a $r^{1-\frac{\lambda}{\Lambda}(N-1)}$ se $N \neq \frac{\Lambda}{\lambda} + 1$, proprietà questa che generalizza a soluzioni viscosità il classico risultato di Hadamard.

La proprietà di Liouville è stata recentemente estesa ad operatori estremali di tipo ellittico degeneri modellati sull'operatore di Laplace sul gruppo di Heisenberg H^n (vedi [23]).

4.2 Stabilità di soluzioni viscosità

Per quanto riguarda questo aspetto vogliamo mettere in rilievo come la nozione di soluzione viscosità sia stabile rispetto a perturbazioni dei dati nella norma uniforme e come essa, in combinazione con la proprietà di confronto, consenta di poter passare al limite in espressioni non lineari generali del tipo

$$F_\epsilon(x, u_\epsilon, Du_\epsilon, D^2u_\epsilon) = 0$$

anche disponendo soltanto di una stima uniforme in ϵ per $\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u_\epsilon(x)|$.

A titolo di esemplificazione citiamo il seguente risultato di stabilità per il problema di Dirichlet

$$u_\epsilon \in C(\overline{\Omega}) : F_\epsilon(x, u_\epsilon, Du_\epsilon, D^2u_\epsilon) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega \quad (11)$$

su un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ si ha il seguente:

Teorema 4.3 *Supponiamo che F_ϵ sia continua per ogni $\epsilon \in (0, 1)$ e che $F_\epsilon \rightarrow F$ localmente uniformemente per $\epsilon \rightarrow 0$ con F verificante le ipotesi del Teorema di Confronto 4.2. Se le soluzioni viscosità u_ϵ di (11) verificano*

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u_\epsilon(x)| \leq C$$

e se, per ogni $x \in \partial\Omega$,

$$u_\epsilon(y) \rightarrow g(x) \quad \text{per } (y, \epsilon) \rightarrow (x, 0),$$

allora

$$u_\epsilon \rightarrow u \text{ uniformemente per } \epsilon \rightarrow 0$$

e u è l'unica soluzione viscosità di

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega. \quad (12)$$

La dimostrazione fa uso della tecnica cosiddetta dei *semilimiti rilassati* introdotta da Barles - Perthame [18]: grazie all'ipotesi di uniforme limitatezza le posizioni

$$\underline{u}(x) = \liminf_{(y, \epsilon) \rightarrow (x, 0)} u_\epsilon(y) \quad , \quad \bar{u}(x) = \limsup_{(y, \epsilon) \rightarrow (x, 0)} u_\epsilon(y)$$

definiscono, rispettivamente, una funzione semicontinua inferiormente \underline{u} ed una semicontinua superiormente \bar{u} . Con un pò di tecnica si verifica che \underline{u} è una soprasoluzione mentre \bar{u} è una sottosoluzione di (12) e se ne deduce quindi usando la proprietà di confronto che $\underline{u} \leq \bar{u}$. D'altra parte, per costruzione si ha $\underline{u} \leq \bar{u}$ e la conclusione è allora che u_ϵ converge uniformemente ad $\underline{u} = \bar{u} = u$ e che u è soluzione di (12).

Come applicazione di questo risultato si può provare l'esistenza di soluzioni per l'equazione di Hamilton–Jacobi

$$(HJ) \quad F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

passando al limite nell'equazione ellittica regolarizzante

$$(HJ)_\epsilon \quad -\epsilon \Delta u_\epsilon + F(x, u_\epsilon(x), Du_\epsilon(x)) = 0.$$

Le stime uniformi in ϵ necessarie per applicare il Teorema 4.3 si ottengono applicando il Principio di Massimo all'equazione $(HJ)_\epsilon$.

4.3 Esistenza di soluzioni viscosità

La validità del principio di confronto tra sotto e soprasoluzioni, e la equivalenza (vedi Teorema (4.1)) di tali nozioni con quelle di funzioni super e sottoarmoniche nel caso $F(x, r, pX) = -\text{tr}X$, suggeriscono la possibilità di estendere il classico metodo di Perron-Wiener-Brelot per l'esistenza di soluzioni del problema

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, u = g \text{ su } \partial\Omega$$

al caso generale

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ in } \Omega, u = g \text{ su } \partial\Omega. \quad (13)$$

Per soluzione del problema di Dirichlet (13) intendiamo qui una funzione $u \in C(\bar{\Omega})$ che verifica l'equazione alle derivate parziali in senso di viscosità e la condizione al bordo in senso puntuale. Consideriamo gli insiemi

$$\mathcal{S}^- = \{w \in SCS(\bar{\Omega}) : F(x, w, Dw, D^2w) \leq 0 \text{ in } \Omega, w \leq g \text{ su } \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{S}^+ = \{v \in SCI(\bar{\Omega}) : F(x, v, Dv, D^2v) \geq 0 \text{ in } \Omega, v \geq g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Il seguente risultato di esistenza è stato stabilito da H. Ishii dapprima nel caso di equazioni di Hamilton–Jacobi ed in seguito esteso al problema (13).

Teorema 4.4 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N e F verifichi le ipotesi del Teorema di Confronto 4.2. Se esistono funzioni $\underline{u} \in \mathcal{S}^-$ e $\bar{u} \in \mathcal{S}^+$ tali che $\underline{u} = \bar{u} = g$ su $\partial\Omega$, allora la funzione*

$$W(x) = \sup \{w(x) : w \in \mathcal{S}^-, \underline{u} \leq w \leq \bar{u}\} \quad (14)$$

è (l'unica) soluzione viscosità del problema di Dirichlet (13).

Come conseguenza del Teorema di Confronto 4.2, l'insieme delle soluzioni di (13) è ovviamente contenuto in $\mathcal{S}_{\underline{u}, \bar{u}} = \{w \in \mathcal{S}^- : \underline{u} \leq w \leq \bar{u}\}$. Inoltre, ma meno ovviamente, si osserva che sia la semicontinuità superiore che la proprietà di sottosoluzione viscosità sono conservate dall'operazione di inviluppo superiore in (14) e si conclude quindi che $W \in \mathcal{S}^-$.

Il punto più delicato della dimostrazione è la verifica che W è anche una soprasoluzione. Ciò dipende dal fatto che una qualunque sottosoluzione w può essere localmente modificata con un'operazione di troncatura intorno ad ogni punto x_0 in cui essa non soddisfacesse la proprietà di soprasoluzione in modo da ottenere un'altra sottosoluzione $\tilde{w} \in \mathcal{S}_{\underline{u}, \bar{u}}$ tale che

$$\tilde{w} \geq w, \quad \sup_{x \in \Omega} (\tilde{w} - w)(x) > 0.$$

La massimalità di W in $\mathcal{S}_{\underline{u}, \bar{u}}$ impedisce evidentemente la possibilità di una tale costruzione e questo prova che W è anche soprasoluzione e quindi soluzione di (13), vedi [51], [49] per maggiori dettagli.

Naturalmente l'applicabilità di questo risultato è limitata dalla difficoltà di determinare, in special modo quando F è degenere, l'esistenza di funzioni \underline{u} e \bar{u} verificanti le condizioni del Teorema (vedi [31] a questo proposito); questa problematica ha motivato varie ricerche su nozioni corrette di indebolimento dell'assunzione del dato al bordo (per recenti sviluppi su questo argomento si consulti [31] e [13]).

4.4 Regolarità di soluzioni viscosità

Una prima semplice osservazione in questa direzione è quella che se F verifica la condizione di coercitività

$$F(x, r, p) \longrightarrow +\infty \quad \text{per } |p| \longrightarrow +\infty, \quad (15)$$

allora ogni sottosoluzione viscosità limitata $u \in C(\mathbb{R}^N)$ di una equazione di Hamilton–Jacobi

$$(HJ) \quad F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

è lipschitziana. Infatti, la limitatezza di u implica che la funzione

$$y \longrightarrow u(y) - C|x - y|$$

con x fissato e C costante ammette un punto di massimo assoluto $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Se C è scelta sufficientemente grande allora si ha necessariamente $\bar{y} = x$; se ciò non fosse vero, la funzione $y \longrightarrow C|y - x|$ sarebbe infatti differenziabile in \bar{y} e dunque per definizione di sottosoluzione viscosità di (HJ) si concluderebbe che

$$F\left(\bar{y}, u(\bar{y}), C \frac{\bar{y} - x}{|\bar{y} - x|}\right) \leq 0$$

e questo contrasta, per C sufficientemente grande, con (15). Quindi, esiste $C > 0$ tale che per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$u(y) - C|y - x| \leq u(\bar{y}) - C|\bar{y} - x| = u(x);$$

scambiando i ruoli di x e y si dimostra la disuguaglianza opposta e quindi la lipschitzianità di u .

Una classe naturale di regolarità ulteriore per l'equazione (HJ) è quella delle funzioni *semi-concave*, cioè quelle funzioni u per cui

$$\exists C > 0 : x \rightarrow u(x) - C|x|^2 \quad \text{è concava} \quad ;$$

si osservi che questa condizione implica la lipschitzianità e il fatto che il semidifferenziale superiore $D^+u(x)$ è non vuoto per ogni x .

Una classe importante di problemi per cui si può dimostrare la semiconcavità della soluzione è quella dei problemi di Cauchy

$$u_t + H(Du) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0 + \infty), \quad (16)$$

$$u(x, 0) = g(x). \quad (17)$$

E' noto infatti (vedi, per esempio, [57],[15] e [21] per recenti sviluppi in casi degeneri) che se H è uniformemente convessa e superlineare a $+\infty$, allora la soluzione viscosità di (16) è data dalla formula di Hopf - Lax

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^N} \left[tH^* \left(\frac{x - y}{t} \right) + g(y) \right]$$

dove H^* è la trasformata di Legendre di H e che $x \rightarrow u(x, t)$ è semiconcava per ogni $t > 0$.

In una serie di lavori recenti P. Cannarsa, C. Sinestrari e P. Albano [22],[1] hanno individuato classi di problemi (HJ) dotati di soluzioni semiconcave e ne hanno studiato le singolarità e la loro propagazione. Un risultato in questa direzione afferma che se u è una soluzione viscosità semiconcava di (HJ) , x_0 un suo punto singolare e vale la condizione

$$0 \notin \text{co}D_p F(x_0, u(x_0), D^+u(x_0)) ,$$

allora esiste una curva lipschitziana $X : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che $X(s)$ è singolare per u per ogni $s \in [0, \rho]$ e X' verifica l'inclusione differenziale

$$X'(s) \in \text{co}D_p F(X(s), u(X(s)), D^+u(X(s))), \quad X(0) = x_0$$

che si interpreta come una generalizzazione della classica equazione delle caratteristiche.

In collegamento a ciò è importante sottolineare che la semiconcavità delle soluzioni di equazioni di tipo (HJ) gioca un ruolo cruciale nella Teoria del Controllo in quanto consente tra l'altro di stabilire una connessione rigorosa tra il metodo della Programmazione Dinamica e il Principio di Massimo di Pontryagin anche nel caso di funzioni valore non regolari (vedi, per esempio, [9]).

Per equazioni uniformemente ellittiche, i.e. con F tale che

$$\lambda \operatorname{tr}(X - Y) \leq F(x, r, p, Y) - F(x, r, p, X) \leq \Lambda \operatorname{tr}(X - Y)$$

per ogni $X \geq Y$ con $0 < \lambda \leq \Lambda$, la teoria della regolarità è stata sviluppata in maniera particolarmente approfondita da L. Caffarelli che ha stabilito la validità per soluzioni viscosità di alcune stime a priori note per soluzioni classiche dai lavori di L.C. Evans, N.V. Krilov e altri (vedi [41],[56],[55]).

Ad esempio, per il problema

$$F(D^2u) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

vale la stima holderiana

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \leq C \|f\|_{C^{0,1}};$$

nel caso in cui F sia convessa una maggiore regolarità è garantita dalla stima

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|f\|_{C^{1,1}}.$$

Le dimostrazioni di questi risultati fanno uso di tecniche molto sofisticate di analisi reale quali la decomposizione di Calderon-Zygmund e delle stime di Alexandrov-Bakelman-Pucci; una loro descrizione anche sommaria non è possibile nell'ambito di questa rassegna e rinvio perciò il lettore alla monografia [20].

Molto meno conosciuto è il panorama della regolarità nei casi intermedi in cui F è ellittica degenerare ma non completamente degenerare, come ad esempio

$$F(x, X) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} [-\operatorname{tr} A \sigma(x) X \sigma^*(x)]$$

dove

$$\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda} = \{A \in S^M : \lambda |\xi|^2 \leq A \xi \cdot \xi \leq \Lambda |\xi|^2, \forall \xi \in R^M\}$$

e $\sigma(x)$ è una matrice $M \times N$ verificante la condizione di generazione di Hörmander (vedi [56] per informazioni in questa direzione).

4.5 Problemi asintotici: omogeneizzazione di equazioni di Hamilton-Jacobi

La nozione di soluzione viscosità, oltre alla sua importanza in quanto nozione globale di soluzione generalizzata di equazioni completamente nonlineari, si è rivelata particolarmente utile nell'analisi di vari problemi asintotici per tali equazioni.

Tecniche di soluzioni viscosità sono state applicate infatti a questioni di perturbazioni singolari [54], [8], [7], [3], di ergodicità [24], [25], [54], [5] [4], di grandi deviazioni [43],[17], di limiti idrodinamici [66] e di omogeneizzazione [62], [42], [47], [2], [44],[26]. Questioni limite di natura differente sono quelle collegate alla convergenza di schemi di approssimazione di soluzioni viscosità di equazioni del tipo

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 .$$

Non c'è qui lo spazio, se non marginalmente alla fine di questa sezione, per una descrizione di tale ampia ed importante problematica; rinvio a tale proposito il lettore interessato ai lavori [27], [28], [65], [37], [19], [64], [16] e all'Appendice a cura di M. Falcone in [9].

Per esemplificare la metodologia delle soluzioni viscosità in problemi asintotici ci limitiamo qui a descrivere il problema della omogeneizzazione periodica di equazioni di Hamilton-Jacobi, restringendo per semplicità l'attenzione al caso modello

$$(HJ)^\epsilon \quad u^\epsilon(x) + H\left(x, \frac{x}{\epsilon}, Du^\epsilon(x)\right) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^N ,$$

dove $\xi \rightarrow H(x, \xi, p)$ è una funzione Z^N - periodica ed ϵ un parametro positivo. A causa della periodicità la Hamiltoniana H ha un comportamento fortemente oscillatorio per piccoli valori di ϵ e risultano quindi non banali le questioni di studiare il comportamento delle soluzioni u^ϵ per $\epsilon \rightarrow 0$ e quella di identificare una Hamiltoniana effettiva \bar{H} che ne governi il comportamento limite.

Sotto l' ipotesi di coercitività

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \{H(x, \xi, p) : x, \xi \in \mathbb{R}^N, |p| \geq R\} = +\infty ,$$

e condizioni di uniforme continuità di H e di limitatezza di $H(x, \xi, 0)$ si può dimostrare (vedi, ad esempio, [51], [9]) che l'equazione $(HJ)^\epsilon$ ha per ogni $\epsilon > 0$ un'unica soluzione viscosità Z^N - periodica e Lipschitziana u^ϵ e che vale la stima

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (|u^\epsilon(x)| + |Du^\epsilon(x)|) \leq C < +\infty$$

con C indipendente da $\epsilon \in (0, 1)$. Dal teorema di Ascoli-Arzelà segue dunque l'esistenza di una funzione Lipschitziana u , limite uniforme di u^ϵ per $\epsilon \rightarrow 0$, e la questione è dunque quella di caratterizzare u come soluzione di una equazione di Hamilton-Jacobi.

A questo scopo si considera (vedi [62], [42]) il *problema di cella*

$$(CP) \quad H(x, \xi, p + D\chi(\xi)) = \lambda \quad , \xi \in \mathbb{R}^N ,$$

dove x e p giocano il ruolo di parametri. Nelle ipotesi fatte, per ogni fissati (x, p) esiste un *unico* numero reale $\lambda = \lambda(x, p)$ tale che l'equazione (CP) ha almeno una soluzione viscosità $\chi = \chi(\xi)$. Inoltre, le soluzioni u^ϵ di $(HJ)^\epsilon$ convergono uniformemente ad una funzione lipschitziana u che verifica quasi ovunque l'equazione

$$(\overline{HJ}) \quad u(x) + \overline{H}(x, Du(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

dove \overline{H} è definita da $\overline{H}(x, p) = \lambda(x, p)$; dato che u è soluzione di (\overline{HJ}) anche in senso viscosità e che \overline{H} eredita da $H(x, \xi, p)$ le condizioni di struttura che garantiscono l'unicità della soluzione viscosità di (\overline{HJ}) , tale equazione caratterizza dunque il comportamento limite delle equazioni $(HJ)^\epsilon$.

La velocità di convergenza della procedura di omogeneizzazione è stata recentemente studiata in [26]; in condizioni generali si ha

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u^\epsilon(x) - u(x)| \leq C\epsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (18)$$

Nel caso speciale in cui $H = H(\xi, p)$, l'unica soluzione della equazione omogeneizzata

$$(\overline{HJ}) \quad u(x) + \overline{H}(Du(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

è la costante $u(x) \equiv -\overline{H}(0)$. Si verifica allora senza difficoltà che le funzioni

$$w^\epsilon(x) = -\overline{H}(0) + \epsilon v\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \epsilon \|v\|_\infty, \quad z^\epsilon(x) = -\overline{H}(0) + \epsilon v\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon \|v\|_\infty,$$

dove v è una qualsiasi soluzione del problema di cella con $p = 0$, soddisfano in senso di viscosità

$$w^\epsilon(x) + H\left(\frac{x}{\epsilon}, Dw^\epsilon(x)\right) \leq 0 \leq z^\epsilon(x) + H\left(\frac{x}{\epsilon}, Dz^\epsilon(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Dunque, applicando la proprietà di confronto tra sotto e sopra soluzioni limitate di $(HJ)^\epsilon$, si conclude che

$$-2\epsilon \|v\|_\infty \leq u^\epsilon(x) + \overline{H}(0) \leq 2\epsilon \|v\|_\infty,$$

che prova la validità della stima

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u^\epsilon(x) - u(x)| \leq C\epsilon \quad (19)$$

in questo caso particolare.

Una questione di rilievo nei problemi di omogeneizzazione concerne il calcolo esplicito della Hamiltoniana effettiva. Dato che questo è possibile solo in casi molto particolari, appare

importante dal punto di vista applicativo disporre di metodi rigorosi di approssimazione della funzione \bar{H} . Questa problematica è oggetto del lavoro [6]. Quando H è della forma

$$H(x, \xi, p) = \sup_{a \in A \subseteq \mathbb{R}^M} [-f(a) \cdot p - L(x, \xi, a)],$$

tipica di problemi di controllo ottimo o di calcolo delle variazioni, per il calcolo approssimato di \bar{H} sembra conveniente l'uso di schemi di discretizzazione per il calcolo numerico della soluzione viscosità $v_\delta(\xi) = v_\delta(\xi; x, p)$ della equazione regolarizzante

$$(HJ)_\delta \quad \delta v_\delta(\xi) + \sup_{a \in A \subseteq \mathbb{R}^M} [-f(a) \cdot (p + Dv_\delta(\xi)) - L(x, \xi, a)] = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Seguendo [27] si considera per $h > 0$ l'equazione approssimata

$$\delta v_\delta^h(\xi) + \sup_{a \in A \subseteq \mathbb{R}^M} [-(1 - \delta h)v_\delta^h(\xi + p + hf(a)) - hL(x, \xi, a)] = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Combinando le stime sull'errore commesso approssimando v_δ con v_δ^h ([28]) con il fatto che per ogni (x, p) fissati si ha

$$\sup_{x,p} |\bar{H}(x, p) + \delta v_\delta(\xi; x, p)| \leq \delta C(1 + |p|),$$

(vedi [26]), se ne deduce la stima

$$\sup_{x,p} |\bar{H}(x, p) + \delta v_\delta^h(\xi)| \leq C \left(\delta h^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}} + \delta(1 + |p|) \right).$$

References

- [1] P. Albano, P. Cannarsa, Structural properties of singularities of semiconcave functions, Ann. Sc.Norm.Sup.Pisa Cl.Sci. (4) Vol.XXVIII (1999).
- [2] O. Alvarez, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations in perforated sets, in corso di stampa su J. Differential Equations.
- [3] O. Alvarez, M. Bardi, Viscosity solution methods for singular perturbations in deterministic and stochastic control, preprint (2000).
- [4] M. Arisawa, Ergodic problem for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation I, Ann. IHP Anal. Non.Lin. 14 (1997).
- [5] M. Arisawa, P.L. Lions, On ergodic stochastic control, Comm. Partial Differential Equations 23 (1998).

- [6] M. Arisawa, I. Capuzzo Dolcetta, M. Falcone, lavoro in preparazione.
- [7] F. Bagagiolo, M. Bardi, Singular perturbation of a finite horizon problem with state-space constraints, *SIAM J. Control Optim.* 36 (1998).
- [8] F. Bagagiolo, M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, A viscosity solutions approach to some asymptotic problems in optimal control, in *Partial differential equations methods in control and shape analysis*, G. Da Prato & J.P. Zolesio eds., Marcel Dekker, New York (1997).
- [9] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Birkhäuser Boston (1997).
- [10] M. Bardi, F. Da Lio, Propagation of maxima and strong maximum principle for viscosity solutions of degenerate elliptic equations I: convex operators, in corso di stampa su *Nonlinear Analysis TMA*.
- [11] M. Bardi, F. Da Lio, On the strong maximum principle for fully nonlinear degenerate elliptic equations, *Archiv der Mathematik* 73 (1999).
- [12] M. Bardi, P. Goatin, Invariant sets for controlled degenerate diffusions: a viscosity solutions approach, in *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: a Volume in Honor of W.H. Fleming*, W.M. McEneaney, G.G. Yin and Q. Zhang eds, Birkhäuser, Boston (1999).
- [13] M. Bardi, S. Bottacin, On the Dirichlet problem for nonlinear degenerate elliptic equations and applications to optimal control, in corso di stampa su *Rend.Sem.Mat.Univ.Pol.Torino*.
- [14] M. Bardi, M.G. Crandall, L.C. Evans, H.M. Soner, P.E. Souganidis, *Viscosity Solutions and Applications*, I. Capuzzo Dolcetta & P.L. Lions eds., Lecture Notes in Mathematics 1660, Springer (1997).
- [15] M. Bardi, L.C. Evans, On Hopf's formula for solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Nonlinear Analysis* 8 (1984).
- [16] M. Bardi, M. Falcone, P. Soravia, Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions, in *Stochastic and differential games: theory and numerical methods*, M. Bardi, T. Parthasarathy & T.E.S. Raghavan eds., Birkhäuser, Boston (1999).
- [17] G. Barles, *Solutions de Viscosité des Equations de Hamilton-Jacobi*, Springer, Paris (1994).
- [18] G. Barles, B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *RAIRO Model.Math.Anal.Numer.* 16 (1991).
- [19] G. Barles, P.E. Souganidis, Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations, *Asymptotic Analysis* 4 (1991).
- [20] L. Caffarelli, X. Cabre, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, AMS Colloquium Publications, 43, Providence (1995).

- [21] F. Camilli, A. Siconolfi, Maximal subsolutions for a class of degenerate Hamilton-Jacobi equations, *Indiana Univ.Math.J.* 48 (1999).
- [22] P. Cannarsa, C. Sinestrari, Convexity properties of the minimum time function, *Calc.Var.Partial Differential Equations* 3 (1995).
- [23] I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutri, On the Liouville property for sublaplacians, *Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa* (4) 25, 1-2 (1997).
- [24] I. Capuzzo Dolcetta, J.L. Menaldi, On the deterministic optimal stopping time problem in the ergodic case, in *Theory and Applications of Nonlinear Control Systems*, C.I. Byrnes & A. Lindquist eds., North-Holland (1986).
- [25] I. Capuzzo Dolcetta, P.L. Lions, Hamilton-Jacobi equations with state constraints, *Trans. Amer. Math. Soc.* 318 (1990).
- [26] I. Capuzzo Dolcetta, H. Ishii, On the rate of convergence in homogenization of Hamilton-Jacobi equations, *Proc. EQUADIFF99*, Berlin (in corso di stampa).
- [27] I. Capuzzo Dolcetta, On a discrete approximation of the Bellman equation of deterministic control theory, *Appl.Math.Optim.* 10 (1983).
- [28] I. Capuzzo Dolcetta, H. Ishii, Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory, *Appl.Math.Optim.* 11 (1984).
- [29] F. Cattè, P.L. Lions, J.M. Morel, T. Coll, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion, *SIAM J. Numer.Anal.* Vol.29 No.1 (1992).
- [30] X. Chen, Y. Giga, S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J.Diff.Geom.* 33 (1991).
- [31] M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 27, Number 1 (1992).
- [32] M. G. Crandall, P. L. Lions, Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris Sè r. I Math.* 292 (1981).
- [33] M. G. Crandall, P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983).
- [34] M. G. Crandall, L. C. Evans, P. L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 282 (1984).
- [35] M. G. Crandall, P. L. Lions, Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, Part I Uniqueness of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.* 62 (1985).

- [36] M. G. Crandall, P. L. Lions, Some remarks on the existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Illinois J. Math.* 31 (1987).
- [37] M.G. Crandall, P.L. Lions, Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Math.Comp.* 43 (1984).
- [38] A. Cutri, F. Leoni, On the Liouville property for fully nonlinear equations, in corso di stampa su *Ann.Inst. H. Poincarè Analyse Nonlineaire*.
- [39] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Implicit Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston (1999).
- [40] L.C. Evans, J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature I, *J.Diff.Geom.* 33 (1991). *Studies in Mathematics*, AMS Providence (1998).
- [41] L.C. Evans, Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations, *Comm.Pure Appl. Math.* XXV (1982).
- [42] L.C. Evans, Periodic homogenization of certain fully nonlinear partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 120 (1992).
- [43] L.C. Evans, H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, *Ann.Inst. H. Poincarè Analyse Nonlineaire*, Vol.2, n.1 (1985).
- [44] L.C. Evans, D. Gomes, Effective hamiltonians and averaging for hamiltonian dynamics, preprint.
- [45] G. Fichera, On a unified theory of boundary value problems for elliptic - parabolic equations of second order, in *Boundary problems in differential equations*, University of Wisconsin Press, Madison (1960).
- [46] W.H. Fleming, M.H. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer New York (1993)
- [47] K. Horie, H. Ishii, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations on domains with small scale periodic structure, *Indiana Univ.Math.J.* 47 (1998).
- [48] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Birkhäuser, Boston (1994).
- [49] H. Ishii, On uniqueness and existence of solutions of fully nonlinear second order elliptic PDè s, *Comm.Pure Appl.Math.* 42 (1989).
- [50] H. Ishii, Viscosity solutions of nonlinear partial differential equations, *Sugaku Expositions*, Volume 9, Number 2 (1996).
- [51] H. Ishii, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math.J.* 55 (1987).

- [52] R. Jensen, The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations, *Arch.Rational Mech.Anal.* 101 (1988).
- [53] R. Jensen, Uniqueness of viscosity solutions of 2nd order elliptic partial differential equations, preprint.
- [54] R. Jensen, P.L. Lions, Some asymptotic problems in fully nonlinear elliptic equations and stochastic control, *Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa Cl.Sci.* (4) 11 (1984).
- [55] N.V.Krylov, M.V. Safonov, Certain properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients, *Izvestia Akad.Nauk.SSSR* 40 (1980).
- [56] N.V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces*, American Mathematical Society, Providence (1996).
- [57] S.N. Kruzkov, Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations of eikonal type I, *Math.USSR Sbornik* 27 (1975).
- [58] P.L. Lions, On Mathematical Finance, Conferenza al XVI Congresso UMI, Napoli (1999).
- [59] P.L. Lions, Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Part 1: The dynamic programming principle and applications; Part 2: Viscosity solutions and uniqueness, *Comm. Partial Differential Equations* 8 (1983).
- [60] P.L. Lions, *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman Boston (1982)
- [61] P. L. Lions, P. E. Souganidis, Fully nonlinear stochastic partial differential equations: nonsmooth equations and applications, *C.R.Acad.Sci.Paris, Serie I* 327 (1998).
- [62] P.L. Lions, G. Papanicolau, S.R.S. Varadhan, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations, non pubblicato (1986).
- [63] O. Oleinik, E.V. Radkevich, *Second order equations with non negative characteristic form*, American Mathematical Society, Providence (1973).
- [64] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature depending speed: algorithms on Hamilton-Jacobi formulation, *J.Comp.Phys.* 79 (1988).
- [65] P.E. Souganidis, Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *J. Differential Equations*, 57 (1985).
- [66] P.E. Souganidis, Front propagation: theory and applications in *Viscosity Solutions and Applications*, I. Capuzzo Dolcetta & P.L. Lions eds., *Lecture Notes in Mathematics* 1660, Springer (1997).