

Funzioni di piu' variabili

A. Figà Talamanca, L. Lamberti, C. Mascia, C. Pinzari

Prima Prova in itinere (31 Gennaio 2007)

REGOLE: Ogni punto di ogni esercizio vale 3 punti. Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio A.

Sia f la funzione definita da

$$f(x, y) := \exp\left(-\frac{x^2}{y}\right).$$

- i. Determinare l'insieme di definizione della funzione f e le curve di livello relative ai valori $0, \frac{1}{2}, 1, 2$;
- ii. calcolare $\nabla f(x, y)$;
- iii. dire se la funzione f e' prolungabile ad una funzione continua definita su tutto \mathbb{R}^2 .

Esercizio B.

- i. Dire se la funzione $f(x, y) := \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ e' derivabile rispetto ad x e rispetto ad y in $(0, 0)$ e, in caso affermativo, calcolare $\nabla f(0, 0)$.
- ii. Dire se la funzione $f(x, y) := \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ e' derivabile rispetto ad x e rispetto ad y in $(0, 0)$ e, in caso affermativo, calcolare $\nabla f(0, 0)$.
- iii. (facoltativo) Dire per quali funzioni $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x, y) := \phi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e' derivabile rispetto ad x e rispetto ad y nel punto $(0, 0)$.

Esercizio C. Sia P_n la successione di punti definita da

$$P_n := \left(\frac{\cos(n^2)}{1 + n^2}, \frac{(-1)^n n^2}{1 + n^2} \right).$$

- i. Dimostrare che la successione P_n e' limitata.
- ii. Individuare una sottosuccessione di P_n convergente.
- iii. (facoltativo) Dimostrare che la successione P_n non ammette sottosuccessioni convergenti a $(0, 0)$.

Esercizio D. Sia $f(x, y) := (|x| - y)^2$.

- i. Disegnare le curve di livello relative ai valori $0, 1$ e 2 .
- ii. Sia $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dire se la funzione f , considerata nell'insieme D , verifica le ipotesi del Teorema di Weierstrass e se verifica quelle del Teorema dei valori intermedi.
- iii. Individuare l'insieme immagine $f(D)$.