

Funzioni di piu' variabili

A. Figà Talamanca, L. Lamberti, C. Mascia, C. Pinzari

Terza Prova in itinere (21 Marzo 2007)

REGOLE: Ogni punto di ogni esercizio vale 3 punti. Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio A. Sia $D := \{(x, y) : 1 - x \leq y \leq 2 - x, 2x - 2 \leq y \leq 2x\}$.

- i. Disegnare l'insieme D e calcolarne l'area.
- ii. Determinare una trasformazione lineare che mandi D in un rettangolo.
- iii. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x + 2y) dx dy.$$

Esercizio B. Sia $f(x, y, z) = x + y + z$.

- i. Calcolare l'integrale di f su $\Omega_0 := \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- ii. Calcolare l'integrale di f su $\Omega_1 := \Omega_0 \cap \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1/4\}$.
- iii. Calcolare l'integrale di f su $\Omega_2 := \Omega_1 \cap \{(x, y, z) : x - y \geq 0\}$.

Esercizio C.

- i. Dire per quali scelte di $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale

$$\mathbf{F}_a(x, y) = \left(x e^{-(x^2 + a y^2)}, y e^{-(x^2 + a y^2)} \right)$$

e' conservativo e, per tali scelte, determinarne un potenziale.

- ii. Sia Γ la poligonale data dai punti $A = (-1, 0)$, $B = (0, 0)$ e $C = (0, 1)$, orientata da A a C . Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{T} ds$$

dove $\mathbf{F}_a$ indica il campo vettoriale definito in i.

- iii. Dimostrare che il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (x \phi(x^2 + y^2), y \phi(x^2 + y^2))$ e' conservativo per ogni scelta di $\phi \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio D. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x, y + \frac{z}{y^2 + z^2}, z - \frac{y}{y^2 + z^2} \right)$$

- i. Calcolare il rotore di $\mathbf{F}$.
- ii. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo il cammino parametrizzato da

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = \cos t \quad t \in [0, 2\pi].$$

- iii. Dire se il campo vettoriale $\mathbf{F}$ e' conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.