CORSO DI LAUREA IN FISICA, FISICA E ASTROFISICA
PROVA IN ITINERE - 7/12/2011

**2.1. Esercizio.**
*Data la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4x + 5}$$

- *determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti,*
- *determinare gli intervalli di crescenza e/o decrescenza e gli eventuali punti di massimo e/o minimo,*
- *disegnare il grafico.*

SOLUZIONE:

Tenuto conto che $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4x + 5} = \frac{|x - 2|}{|x - 2|^2 + 1}$$

Il denominatore non si annulla mai, quindi la funzione é definita in tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre riesce $f(x) \geq 0$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x - 1|}{|x - 1|^2 + 1} = 0$$

La funzione é simmetrica rispetto ad $x = 2$, cioé $f(2 + h) = f(2 - h)$: basta pertanto determinarne il grafico per $x \geq 2$

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x - 2)^2 + 1} \quad \to \quad f'(x) = \frac{1 - (x - 2)^2}{((x - 2)^2 + 1)^2}$$

Da cui, limitatamente alla semiretta $x > 2$, $f'(x)$ é positiva in $(2, 3)$ e negativa dopo: quindi $f(x)$ é crescente in $(2, 3)$ e decrescente dopo.
Tenuto presente che

$$f(2) = 0, \;\; f(3) = 1/2, \;\; \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

si riconosce, vedi figura **??**, che

$$minimo = 0 = f(2), \quad massimo = f(3) = \frac{1}{2}$$

Nel punto $x = 2$ la funzione non é derivabile.

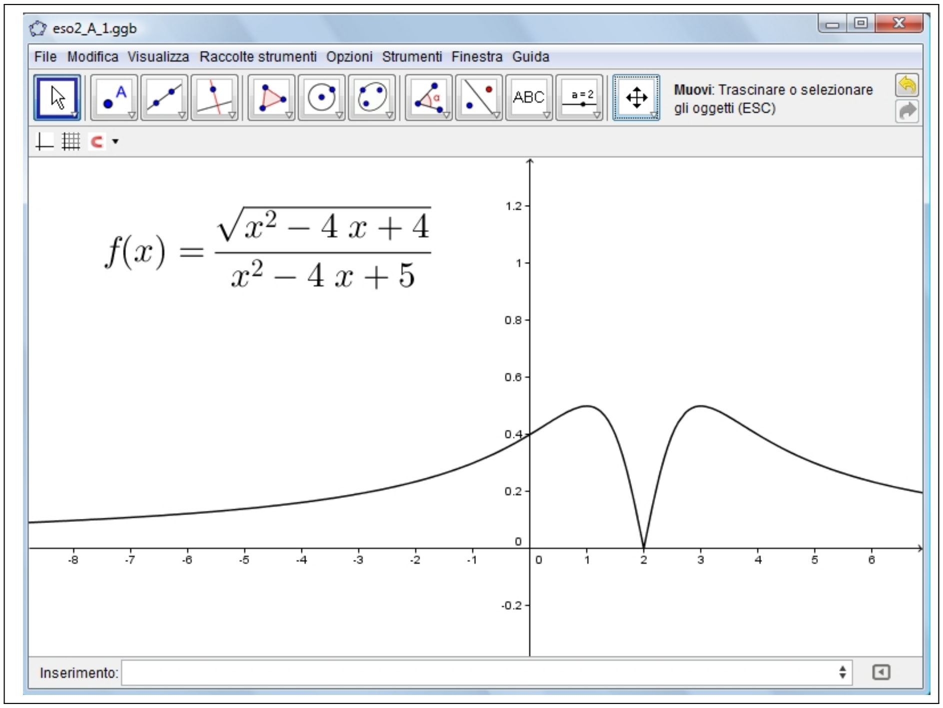


FIGURA 1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4x + 5}$

**Osservazione 2.1.** *Che la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2kx + k^2}}{x^2 + 2kx + k^2 + 1} = \frac{|x + k|}{|x + k|^2 + 1}$$

*abbia, qualunque sia $k \in \mathbb{R}$ minimo 0 e massimo $1/2$ era del resto ovvio:*

$$2|a| \leq a^2 + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{|x + k|}{|x + k|^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

*e quindi*

$$f(-k) = 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} = f(1 - k)$$

### 2.2. Esercizio.

- *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+2} x^k$ *é assolutamente convergente e per quali $x \in \mathbb{R}$ é convergente.*
- *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (2 + x)^k$ *é convergente e determinarne la somma.*

SOLUZIONE:

Dal criterio del rapporto segue che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+2} x^k$ é assolutamente convergente se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{k+1}{k+2} x^k\right|}{\left|\frac{k}{k+1} x^{k-1}\right|} = |x| < 1$$

Agli estremi $x = \pm 1$ la serie non é convergente perché il termine generale non riesce per tali valori infinitesimo.

La serie geometrica $\sum_{k=2}^{\infty} (2+x)^k$ é convergente per

$$|2+x| < 1 \quad \to \quad -3 < x < -1$$

La somma vale

$$S = (2+x)^2 \frac{1}{1-(2+x)} = -\frac{(x+2)^2}{1+x}$$

### 2.3. Esercizio.

*Assegnata la funzione* $f(x) = \log(1+2x)$

- *calcolare i polinomi di Taylor* $T_1(x)$ *e* $T_2(x)$ *di punto iniziale* $x_0 = 0$ *e ordini* 1 *e* 2,
- *provare che riesce* $\forall x \geq 0 : \; T_2(x) \leq f(x) \leq T_1(x)$.

SOLUZIONE:

$$T_1(x) = 2x, \quad T_2(x) = 2x - \frac{4}{2}x^2$$

Per provare la disuguaglianza richiesta:

- $\log(1+3x) \leq 2x$ si ricava dal fatto che la $y = 2x$ é tangente al grafico in corrispondenza dell'origine e la funzione $\log(1+2x)$ é concava,
- posto $d(x) = \log(1+2x) - 2x + 4/2\, x^2$ é facile riconoscere che $d(0) = 0$ e che per $x \geq 0$ riesce $d'(x) \geq 0$, per cui

  $$\forall x \geq 0 : \; 0 = d(0) \leq d(x) \quad \to \quad T_2(x) \leq \log(1+2x)$$

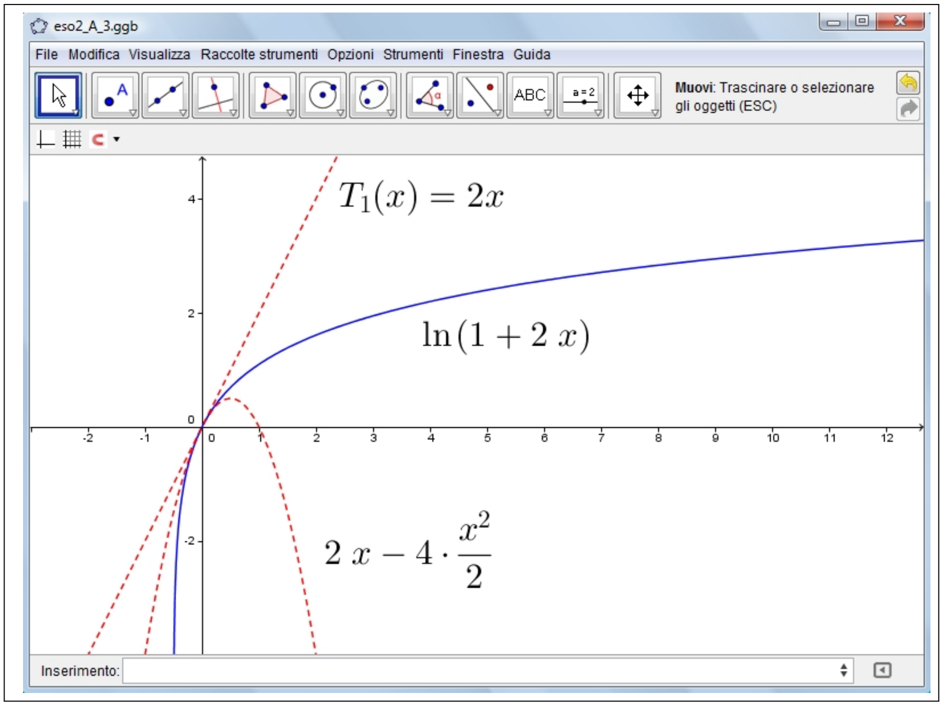


FIGURA 2. $f(x) = \log(1 + 2x)$

### 2.4. Esercizio.

*Assegnata la funzione*

$$f(x) = 4e^x + e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare l'immagine* $f(\mathbb{R})$ *di* $f$,
- *determinare per quali* $k \in \mathbb{R}$ *l'equazione* $f(x) = k$ *non ha soluzioni, ha una soluzione, ha due soluzioni.*

SOLUZIONE:

L'immagine di $f$ é un intervallo determinato dall'*inf* e dal *sup* di $f$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$$

Per determinare il minimo

$$f'(x) = 4e^x - e^{-x} : \; f'(x) = 0 \quad \to \quad e^{2x} = 1/4 \quad \to \quad e^x = 1/2 \quad \to \quad x = -\log(2)$$

Ne segue

$$minimo = f(-\log(2)) = 4$$

L'immagine di $f$ éd pertanto l'intervallo $[4, +\infty)$.

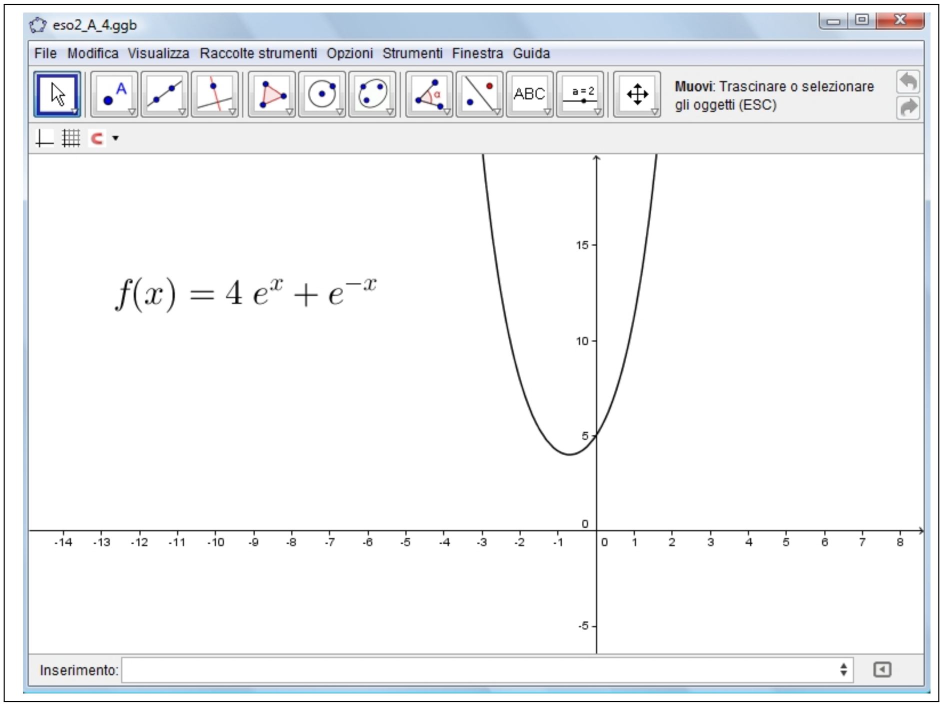


FIGURA 3. $f(x) = 4e^x + e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} x < -\log(2) & \to & f'(x) < 0 & \to & f(x) \searrow \\ x > -\log(2) & \to & f'(x) < 0 & \to & f(x) \nearrow \end{cases}$$

Pertanto l'equazione $f(x) = k$:

- non ha soluzioni se $k < 4$
- ha una sola soluzione se $k = 4$
- ha due soluzioni se $k > 4$.