ANALISI

Soluzioni terzo esonero

30 gennaio 2012

3.1. Esercizio. *Sia $\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ la curva cosí definita*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-2, 2].$$

(a) Verificare che la curva ha un cappio. Mostrare cioé, tramite calcolo diretto, che esiste una (unica) coppia di valori

$$-2 < a < b < 2$$

tali che $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(b) Calcolare la lunghezza della curva γ.

(c) Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{y}\, ds.$

SOLUZIONE:

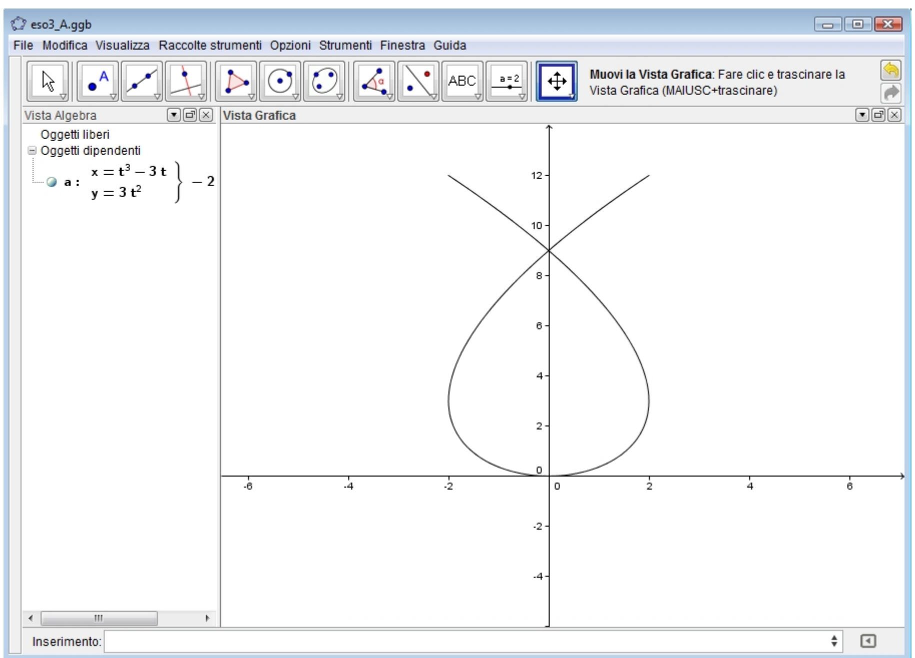

FIGURA 1. $x = t^3 - 3t \quad y = 3t^2, \quad t \in [-2, 2]$

$$\gamma(a) = \gamma(b) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^3 - 3a & = & b^3 - 3b \\ 3a^2 & = & 3b^2 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = -b \quad \rightarrow \quad a^3 - 3a = 0 \quad \rightarrow \quad a(a^2 - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad a = \pm\sqrt{3}$$

Se ne deduce che

$$\gamma(-\sqrt{3}) = \gamma(\sqrt{3})$$

Tenuto conto che

$$\gamma(t) = \{x(t), y(t)\} = \{t^3 - 3t, 3t^2\} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} = 3t^2 + 3$$

riesce

$$\ell(\gamma) = \int_{-2}^{2} (3t^2 + 3) dt = 28$$

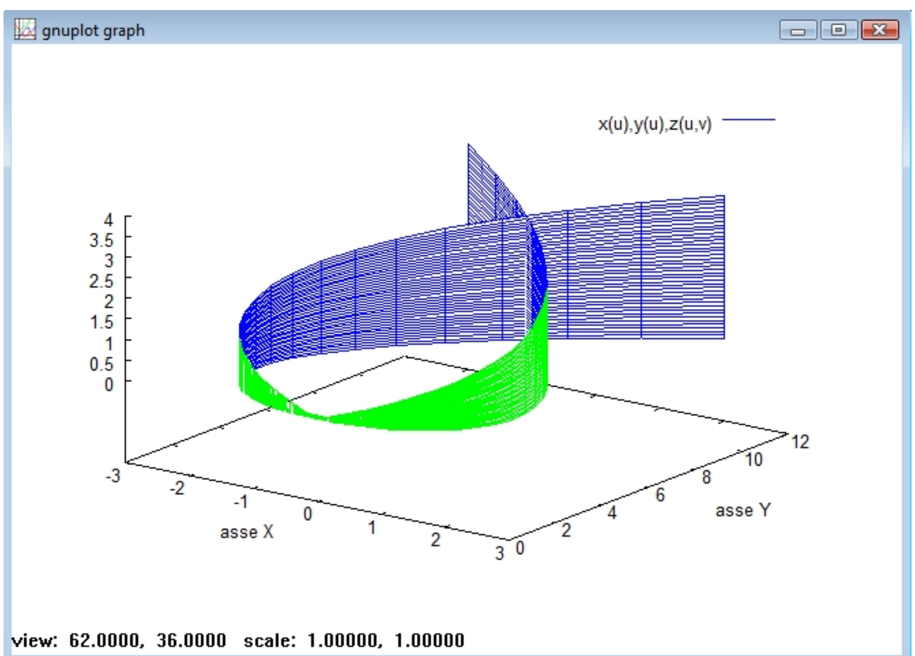

FIGURA 2. $\int_\gamma \sqrt{y}\, ds =$ Area del muro disegnato su γ.

Il calcolo dell'integrale curvilineo conduce a

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{3t^2}(3t^2 + 3)dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{3}|t|(3t^2 + 3)dt =$$

$$2\sqrt{3}\int_0^2 t(3t^2+3)dt = 36\sqrt{3}$$

3.2. Esercizio. *Data l'equazione differenziale*

$$y''(t) + y(t) = \sin(2t) + \cos(3t),$$

(a) trovarne la soluzione generale;

(b) trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali

$$y(0) = -\frac{1}{8}, \quad y'(0) = 0.$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata $y''(t) + y(t) = 0$ sono

$$y_0(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t), \qquad c_1,\ c_2\ \in \mathbb{R}$$

Una soluzione particolare $\overline{y}_1(t)$, dell'equazione

$$y''(t) + y(t) = \sin(2t)$$

si trova nella famiglia

$$A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

Sostituendo si perviene all'equazione

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + A\cos(2t) + B\sin(2t) = \sin(2t) \quad \to \quad \begin{cases} -3A = 0 \\ -3B = 1 \end{cases}$$

si ha pertanto

$$\overline{y}_1(t) = -\frac{1}{3}\sin(2t)$$

Una soluzione particolare $\overline{y}_2(t)$, dell'equazione

$$y''(t) + y(t) = \cos(3t)$$

si trova nella famiglia

$$A\cos(3t) + B\sin(3t)$$

Sostituendo si perviene all'equazione

$$-9A\cos(2t) - 9B\sin(2t) + A\cos(2t) + B\sin(2t) = \sin(2t) \to \begin{cases} -8A = 1 \\ -8B = 0 \end{cases}$$

si ha pertanto

$$\overline{y}_2(t) = -\frac{1}{8}\cos(3t)$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t) + y_0(t) \quad \to$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}\sin(2t) - \frac{1}{8}\cos(3t) + c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$$

La soluzione che verifica le due condizioni iniziali assegnate é:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{8} + c_1 = -\dfrac{1}{8} \\ \\ -\dfrac{2}{3} + c_2 = 0 \end{cases} \quad \to \quad c_1 = 0,\ c_2 = \frac{2}{3}$$

e pertanto

$$-\frac{1}{3}\sin(2t) - \frac{1}{8}\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(t)$$

3.3. Esercizio. *Data l'equazione differenziale*

$$y'(t) + 3y(t) = \cos(t),$$

(a) determinarne la soluzione generale;

(b) determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{3}{10}.$$

La soluzione trovata è limitata?

SOLUZIONE:

Soluzioni dell'omogenea associata $y'(t) + 3y(t) = 0$

$$y_0(t) = ke^{-3t}$$

Una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ dell'equazione si trova, per somiglianza, nella famiglia

$$A\ \cos(t) + B\ \sin(t)$$

Sostituendo si ha

$$-A\ \sin(t) + B\ \cos(t) + 3\,A\ \cos(t) + 3B\ \sin(t) = \cos(t) \to \begin{cases} -A + 3B &= 0 \\ B + 3A &= 1 \end{cases}$$

Da cui

$$A = \frac{3}{10},\ B = \frac{1}{10}, \quad \to \quad \overline{y}(t) = \frac{1}{10}\left\{3\cos(t) + \sin(t)\right\}$$

La soluzione generale é pertanto

$$y(t) = \frac{1}{10}\left\{3\cos(t) + \sin(t)\right\} + ke^{-3t}$$

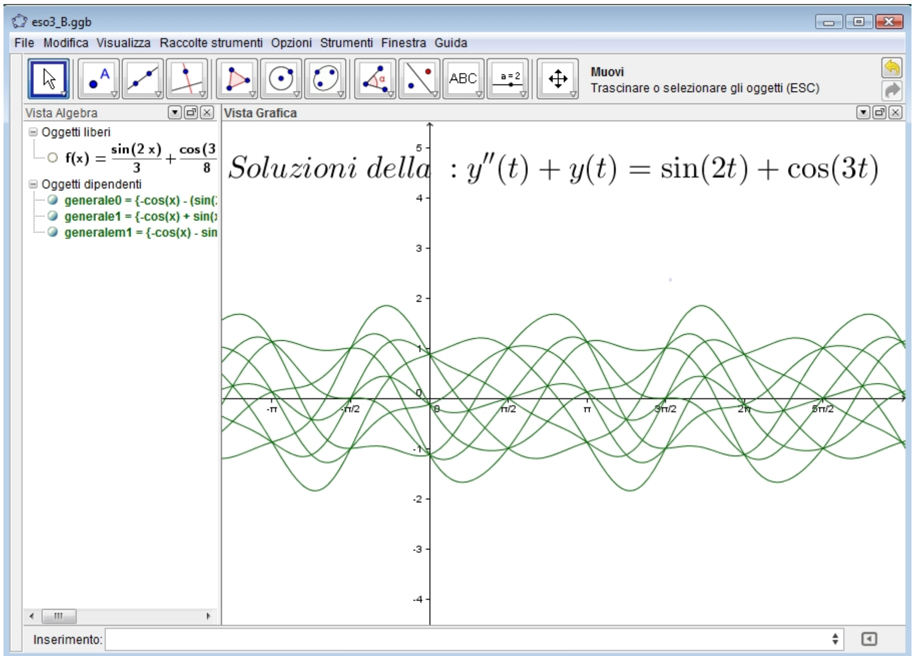

FIGURA 3. $y'(t) + 3y(t) = \cos(t)$

La soluzione che verifica la condizione iniziale é pertanto

$$y(0) = \frac{3}{10} + k = \frac{3}{10} \quad \to \quad k = 0 \quad \to \quad y(t) = \frac{1}{10}\left\{3\cos(t) + \sin(t)\right\}$$

funzione ovviamente limitata

$$\left|\frac{1}{10}\left\{3\cos(t) + \sin(t)\right\}\cos(t)\right| \leq \frac{4}{10}$$

3.4. Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(a) \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{4 - \cos^2(x)}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^3(2x)\, dx.$$

SOLUZIONE:

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{4-\cos^2(x)}\,dx}$$

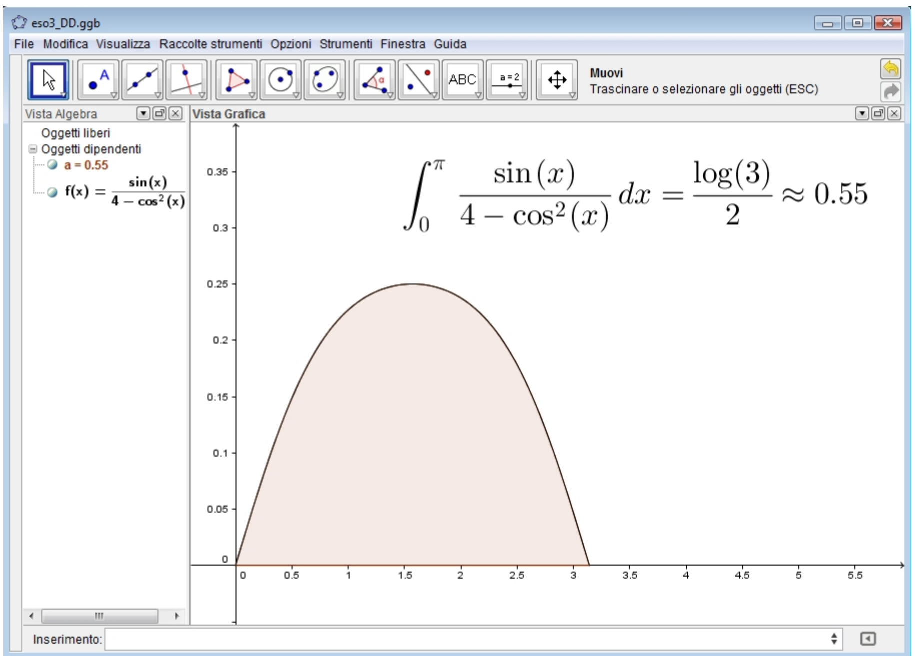

Figura 4. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{4-\cos^2(x)}\,dx$

Posto $\cos(x) = t$ si utilizza la sostituzione

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{4-\cos^2(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4-t^2}\,dt = 2\int_0^{1} \frac{1}{4-t^2}\,dt$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right\}$$

si ricava

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{4-\cos^2(x)}\,dx = \frac{2}{4}\left\{\int_0^{1} \frac{1}{2-t}dt + \int_0^{1} \frac{1}{2+t}dt\right\} = \frac{\log(3)}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^3(2x)\,dx}$$

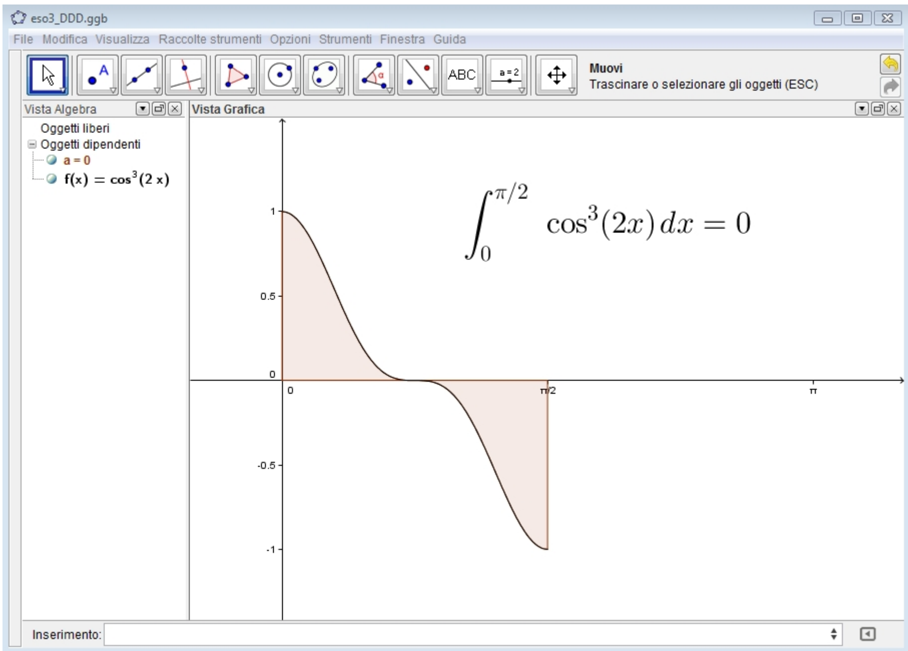

FIGURA 5. $\int_0^{\pi/2} \cos^3(2x)\,dx$

Tenuto conto che

$$\cos^3(2x) = \cos^2(2x)\ \cos(2x) = (1 - \sin^2(2x))\cos(2x)$$

si riconosce che

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(2x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos(2x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{6}\sin^3(2x)\Big|_0^{\pi/2} = 0$$