

Lo studente svolga quanti più esercizi riesce.

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \sqrt{3x - 9} - 5,$$

- a) *determinare l'insieme di definizione;*
- b) *determinare l'insieme immagine;*
- c) *dire se f è invertibile. In caso affermativo, determinare f^{-1} .*

SOLUZIONE:

La funzione é definita per

$$3x - 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 3$$

Tenuto conto che l'addendo $\sqrt{3x - 9}$ produce al variare di $x \geq 3$ tutti i numeri reali positivi, l'insieme immagine é $y \geq -5$.

f é monotona crescente

$$a < b \quad \rightarrow \quad 3a - 9 < 3b - 9 \quad \rightarrow \quad \sqrt{3a - 9} - 5 < \sqrt{3b - 9} - 5 \quad \rightarrow \quad f(a) < f(b)$$

quindi é invertibile.

$$\sqrt{3x - 9} - 5 = y \quad \rightarrow \quad \sqrt{3x - 9} = y + 5 \quad \rightarrow \quad 3x - 9 = (y + 5)^2 \quad \rightarrow \quad x = 3 + \frac{1}{3}(y + 5)^2$$

da cui

$$\forall y \geq -5 : f^{-1}(y) = 3 + \frac{1}{3}(y + 5)^2$$

Esercizio 2. *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x(3 - x)(8 - x) > 0\}.$$

- a) *Verificare se A è limitato.*
- b) *Verificare se A è intervallo.*
- c) *Determinare l'estremo inferiore di A e dire se è minimo di A .*

SOLUZIONE:

L'insieme A é unione di piú intervalli:

- l'intervallo $[-2, 2]$ estremi inclusi,
- due dei quattro intervalli determinati dai tre valori 0, 3, 8: l'intervallo $(0, 3)$ estremi esclusi e l'intervallo $(8, +\infty)$ anch'esso estremi esclusi.

Pertanto

$$A = [-2, 2] \cup (0, 3) \cup (8, +\infty)$$

- non é limitato,
- non é un intervallo, manca il tratto $[3, 8]$,
- A ha minimo: $\inf A = \min A = -2$

Esercizio 3. Sia $(a_n)_n$ la successione

$$a_n = \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1}$$

- Provare che è limitata.
- Determinarne il limite ℓ .
- Posto $\varepsilon = 2$, determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

SOLUZIONE:

La successione é limitata:

$$\left| \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{2 + \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \leq 2 + \frac{7}{n^2} \leq 9$$

La successione é convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{7}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})} = 2$$

La distanza di a_n dal limite:

$$\left| \frac{2n^2 - 7}{n^2 + 1} - 2 \right| = \frac{9}{n^2 + 1} \leq 2 \quad \rightarrow \quad \frac{7}{2} \leq n^2$$

disuguaglianza soddisfatta da tutti gli $n \geq 2$.

Esercizio 4. Sia

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq 1 \right\}.$$

- Determinare l'insieme A .
- Esaminare se A è limitato.

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A .

SOLUZIONE:

$$\left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| \leq |x-2|$$

ovvero

$$\text{distanza}\{x, -2\} \leq \text{distanza}\{x, 2\}$$

da cui

- A é la semiretta $A := \{x \leq 0\}$
- A non é limitato,
- $\sup A = \max A = 0$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cos(\pi n) - \log(n)}{n^3 - \log n^3 + 1} \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - \sqrt{4n^2 - n}.$$

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} \frac{n \cos(\pi n) - \log(n)}{n^3 - \log n^3 + 1} &= \frac{n \cos(\pi n) + \frac{\log(n)}{n}}{n^3 \left(1 - \frac{\log(n^3)}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right)} = \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(-1)^n + \frac{\log(n)}{n}}{1 - \frac{\log(n^3)}{n^3} + \frac{1}{n^3}} \end{aligned}$$

ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cos(\pi n) - \log(n)}{n^3 - \log n^3 + 1} = 0$$

$$2n - \sqrt{4n^2 - n} = \frac{(2n - \sqrt{4n^2 - n})(2n + \sqrt{4n^2 - n})}{2n + \sqrt{4n^2 - n}} = \frac{n}{2n + \sqrt{4n^2 - n}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}$$

ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n - \sqrt{4n^2 - n}\right) = \frac{1}{4}$$

Esercizio 6. Si consideri la successione $(a_n)_n$ definita come

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3-n^2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

- a) Calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.
b) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

SOLUZIONE:

Le due successioni, quella dei termini pari e quella dei dispari sono entrambe monotone:

- quella dei pari, fatta di numeri negativi per $n \geq 2$, é crescente e inizia con $a_2 = -1$,
- quella dei dispari, fatta di numeri positivi é decrescente e inizia con $\log(2) \simeq 0.69314$.

É evidente quindi che

$$\forall n : -1 \leq a_n \leq \log(2)$$

Da cui

$$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = -1, \quad \sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \log(2)$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3-n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = 0$$

se ne deduce che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$