Corsi di Laurea in Fisica, Fisica e Astrofisica

Prova in itinere del 2–11–2011

Lo studente svolga quanti più esercizi riesce.

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 9,$$

a) determinare l'insieme di definizione;

b) determinare l'insieme immagine;

c) dire se f è invertibile. In caso affermativo, determinare f^{-1}.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione é definita per

$$x+1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -1$$

Tenuto conto che l'addendo $\sqrt{x+1}$ produce al variare di $x \geq -1$ tutti i numeri reali positivi, l'insieme immagine é $y \geq -9$.

f é monotona crescente

$$a < b \quad \rightarrow \quad a+1 < b+1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{a+1}-9 < \sqrt{b+1}-9 \quad \rightarrow \quad f(a) < f(b)$$

quindi é invertibile.

$$\sqrt{x+1}-9 = y \quad \rightarrow \quad \sqrt{x+1} = y+9 \quad \rightarrow \quad x+1 = (y+9)^2 \quad \rightarrow \quad x = -1+(y+9)^2$$

da cui

$$\forall y \geq -9 : \ f^{-1}(y) = -1 + (y+9)^2$$

Esercizio 2. *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x^2 - 1 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \, : \, x(3-x)(8-x) < 0\}.$$

a) Verificare se A è limitato.

b) Verificare se A è intervallo.

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'insieme A é unione di piú intervalli:

- l'intervallo $[-1, 1]$ estremi inclusi,

- due dei quattro intervalli determinati dai tre valori $0, 3, 8$: l'intervallo $(-\infty, 0)$ estremi esclusi e l'intervallo $(3, 8)$ anch'esso estremi esclusi.

Pertanto

$$A = (-\infty, 1] \cup (3, 8)$$

- non é limitato,
- non é un intervallo, manca il tratto $(1, 3]$,
- $\sup A = 8$ non ha massimo.

Esercizio 3. *Sia $(a_n)_n$ la successione*

$$a_n = \frac{6n^2 + 1}{2\,n^2 - 1}$$

a) Provare che è limitata.

b) Determinarne il limite ℓ.

c) Posto $\varepsilon = 2$, determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La successione é limitata:

$$\left|\frac{6n^2 + 1}{2\,n^2 - 1}\right| \leq \frac{6 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \leq 6 + \frac{1}{n^2} \leq 7$$

La successione é convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + 1}{2\,n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(6 + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} = 3$$

La distanza di a_n dal limite:

$$\left|\frac{6n^2 + 1}{2\,n^2 - 1} - 3\right| = \frac{2}{2n^2 - 1} \leq 3$$

disuguaglianza soddisfatta da tutti gli $n \geq 1$.

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \left|\frac{2x + 1}{2x - 1}\right| \leq 1\right\}.$$

a) Determinare l'insieme A.

b) Esaminare se A è limitato.

c) Determinare l'estremo superiore di A e dire se è massimo di A.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2x+1| \leq |2x-1|$$

ovvero

$$\text{distanza}\{2x,\,-1\} \leq \text{distanza}\{2x,\,1\}$$

da cui

- A é la semiretta $A := \{x \leq 0\}$
- A non é limitato,
- $\sup A = \max A = 0$

Esercizio 5. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,\log(n) - \cos(n\,\pi/3)}{n^4 - \log n + 1} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+3}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

$$\frac{n^2\,\log(n) - \cos(n\,\pi/3)}{n^4 - \log n + 1} = \frac{n^3}{n^4}\,\frac{\frac{\log(n)}{n} - \frac{\cos(n\,\pi/3)}{n^3}}{1 - \frac{\log(n)}{n^4} + \frac{1}{n^4}} =$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{\frac{\log(n)}{n} - \frac{\cos(n\,\pi/3)}{n^3}}{1 - \frac{\log(n)}{n^4} + \frac{1}{n^4}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,\log(n) - \cos(n\,\pi/3)}{n^4 - \log n + 1} = 0$$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+3} = \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+3}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} == \frac{-3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$$

ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+3}\right) = 0$$

Esercizio 6. *Si consideri la successione* $(a_n)_n$ *definita come*

$$a_n = \begin{cases} \log\left(\dfrac{n}{n-1}\right) & \textit{se } n \textit{ pari} \\ \\ \dfrac{1}{1-2\,n^2} & \textit{se } n \textit{ dispari.} \end{cases}$$

a) *Calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.*

b) *Calcolare, se esiste,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Le due successioni, quella dei termini pari e quella dei dispari sono entrambe monotone:

- quella dei pari, fatta di numeri positivi per $n \geq 2$, é decrescente e inizia con $a_2 = \log(2)$,
- quella dei dispari, fatta di numeri negativi é crescente e inizia con -1.

É evidente quindi che

$$\forall n : \ \ -1 \leq a_n \leq \log(2)$$

Da cui

$$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = -1, \quad \sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \log(2)$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = 0$$

se ne deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$