

Lo studente svolga quanti più esercizi riesce.

**Esercizio 1.** *Data la funzione*

$$f(x) = 2 - \sqrt{2x + 4},$$

- a) *determinare l'insieme di definizione;*
- b) *determinare l'insieme immagine;*
- c) *dire se  $f$  è invertibile. In caso affermativo, determinare  $f^{-1}$ .*

**SOLUZIONE:**

La funzione é definita per

$$2x + 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -2$$

Tenuto conto che l'addendo  $-\sqrt{2x+4}$  produce al variare di  $x \geq -2$  tutti i numeri reali negativi, l'insieme immagine é  $y \leq 2$ .

$f$  é monotona decrescente

$$a < b \quad \rightarrow \quad 2a+4 < 2b+4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2a+4}-2 < \sqrt{2b+4}-2 \quad \rightarrow \quad f(a) > f(b)$$

quindi é invertibile.

$$2 - \sqrt{2x + 4} = y \quad \rightarrow \quad \sqrt{2x + 4} = 2 - y \quad \rightarrow \quad 2x + 4 = (2 - y)^2 \quad \rightarrow \quad x = -2 + \frac{1}{2}(2 - y)^2$$

da cui

$$\forall y \leq 2 : f^{-1}(y) = -2 + \frac{1}{2}(2 - y)^2$$

**Esercizio 2.** *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x(4 - x)(5 - x) < 0\}.$$

- a) *Verificare se  $A$  è limitato.*
- b) *Verificare se  $A$  è intervallo.*
- c) *Determinare l'estremo superiore di  $A$  e dire se è massimo di  $A$ .*

**SOLUZIONE:**

L'insieme  $A$  é unione di piú intervalli:

- l'intervallo  $[-2, 2]$  estremi inclusi,
- due dei quattro intervalli determinati dai tre valori 0, 4, 5: l'intervallo  $(-\infty, 0)$  estremi esclusi e l'intervallo  $(4, 5)$  anch'esso estremi esclusi.

Pertanto

$$A = (-\infty, 2] \cup (4, 5)$$

- non é limitato,
- non é un intervallo, manca il tratto  $(2, 4]$ ,
- $\sup A = 5$  non é massimo.

**Esercizio 3.** Sia  $(a_n)_n$  la successione

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 5}$$

- Provare che è limitata.
- Determinarne il limite  $\ell$ .
- Posto  $\varepsilon = 3$ , determinare per quali  $n \in \mathbb{N}$  risulta

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

**SOLUZIONE:**

La successione é limitata:

$$\left| \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 5} \right| \leq \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1} \leq 2$$

La successione é convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{5}{n^2})} = \frac{1}{3}$$

La distanza di  $a_n$  dal limite:

$$\left| \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 5} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{8/3}{3n^2 - 5} \right| \leq 3$$

disuguaglianza soddisfatta da tutti gli  $n \geq 1$ .

**Esercizio 4.** Sia

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{3x + 1}{3x - 1} \right| \leq 1 \right\}.$$

- Determinare l'insieme  $A$ .
- Esaminare se  $A$  è limitato.

c) Determinare l'estremo superiore di  $A$  e dire se è massimo di  $A$ .

**SOLUZIONE:**

$$\left| \frac{3x+1}{3x-1} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |3x+1| \leq |3x-1|$$

ovvero

$$\text{distanza}\{3x, -1\} \leq \text{distanza}\{3x, 1\}$$

da cui

- $A$  é la semiretta  $A := \{x \leq 0\}$
- $A$  non é limitato,
- $\sup A = \max A = 0$

**Esercizio 5.** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + (-1)^n \log(n)}{n^3 + \log(n+1)} \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n - \sqrt{25n^2 - n}.$$

**SOLUZIONE:**

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + (-1)^n \log(n)}{n^3 + \log(n+1)} &= \frac{n^2}{n^3} \frac{1 + \frac{(-1)^n \log(n)}{n^2}}{1 + \frac{\log(n+1)}{n^3}} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{(-1)^n \log(n)}{n^2}}{1 + \frac{\log(n+1)}{n^3}} \end{aligned}$$

ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + (-1)^n \log(n)}{n^3 + \log(n+1)} = 0$$

$$5n - \sqrt{25n^2 - n} = \frac{(5n - \sqrt{25n^2 - n})(5n + \sqrt{25n^2 - n})}{5n + \sqrt{25n^2 - n}} = \frac{n}{5n + \sqrt{25n^2 - n}}$$

ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n - \sqrt{25n^2 - n}) = \frac{1}{10}$$

**Esercizio 6.** Si consideri la successione  $(a_n)_n$  definita come

$$a_n = \begin{cases} \log\left(\frac{n}{n+3}\right) & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{2+n^2} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

- a) Calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.  
b) Calcolare, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

**SOLUZIONE:**

Le due successioni, quella dei termini pari e quella dei dispari sono entrambe monotone:

- quella dei pari, fatta di numeri negativi, è crescente e inizia con  $a_2 = \log(2/5) \simeq -0,916$ ,
- quella dei dispari, fatta di numeri positivi è decrescente e inizia con  $\frac{1}{3}$ .

È evidente quindi che

$$\forall n : \log(2/5) \leq a_n \leq \frac{1}{3}$$

Da cui

$$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = \log(2/5), \quad \sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \frac{1}{3}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3-n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = 0$$

se ne deduce che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$