L'integrale

1. Il metodo di esaustione

Le funzioni $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non negative determinano il loro sottografico

$$E : \{a \le x \le b, \ \ 0 \le y \le f(x)\}$$

Diviso $[a, b]$ in parti uguali, quindi di lunghezza $h = (b - a)/n$ si considerano plurirettangoli interni al sottografico e plurirettangoli che lo contengono, rispettivamente di aree

$$\underline{S}(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad \overline{S}(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_k$$

essendo α_k e β_k l'estremo inferiore e l'estremo superiore della f nel $k-$esimo intervallino della decomposizione.
Nei casi fondamentali di

$$f(x) = x, \quad x^2, \quad e^x$$

é possibile calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n), \quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n)$$

e riconoscere che vengono uguali: tale comune valore rappresenta naturalmente l'area dei sottografici.

Osservazione 1.1. *Il calcolo dei limiti di cui sopra é legato alla disponibilitá delle seguenti formule*

$$\sum_{k=1}^{m} k \ = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2 \ = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

2. Le somme integrali

Assegnato un intervallo $[a, b]$, $n + 1$ suoi punti

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

producono una decomposizione P in n intervallini

$$[a, b] = \cup_{k=1}^{n} [x_i, x_{i-1})$$

Sia $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, limitata: si possono definire per ogni decomposizione P le due somme

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, (x_i - x_{i-1}), \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \, (x_i - x_{i-1})$$

essendo α_k e β_k l'estremo inferiore e l'estremo superiore della f nel $k-$esimo intervallino della decomposizione.

Lemma 2.1.

$$\underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P)$$

Lemma 2.2. *Sia $P^* = P \cup \{\xi\}$ allora riesce*

$$\underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, P^*), \quad \overline{S}(f, P^*) \le \overline{S}(f, P)$$

Lemma 2.3.

$$\forall P, Q \;\; \underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, Q)$$

Definizione 2.4. *f si dice integrabile in $[a, b]$ se*

$$\sup_P \underline{S}(f, P) = \inf_P \overline{S}(f, P)$$

Tale comune valore si indica con

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

Proposizione 2.5. *f é integrabile in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P_ε tale che*

$$\overline{S}(f, P_\varepsilon) - \underline{S}(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Indichiamo con $L([a, b])$ l'insieme delle funzioni integrabili su $[a, b]$.

Proposizione 2.6. *Sono integrabili in $[a, b]$:*

- *le funzioni crescenti,*
- *le funzioni lipschitziane,*
- *le funzioni caratteristiche $\chi_{[c,d]}(x)$*

Proposizione 2.7. *Si hanno le seguenti proprietá:*

- $f(x) \in L([a, b]) \quad \to \quad k f(x) \in L([a, b]) \; \forall k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b k \, f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$$

- $f(x) \in L([a, b]) \quad \to \quad |f(x)| \in L([a, b])$
- $f(x), g(x) \in L([a, b]) \quad \to \quad \alpha f(x) + \beta g(x) \in L([a, b])$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

- $f(x), g(x) \in L([a,b]) \quad \to \quad f(x)\,.\,g(x) \in L([a,b])$
- $c \in [a,b] \quad \to \quad L([a,b]) \subset L([a,c]),\ L([a,b]) \subset L([c,b])$

DEFINIZIONE 2.8.

$$\int_a^b f(x)\,\chi_{[c,d]}(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia $c \in [a,b]$ riesce*

$$\forall f \in L([a,b]):\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto che

$$\chi_{[a,c]}(x) + \chi_{[c,b]}(x) = 1 \quad \to \quad f(x) = f(x)\chi_{[a,c]}(x) + f(x)\chi_{[c,b]}(x)$$

dalla linearitá segue la tesi. □

3. Il teorema della media

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $f \in L([a,b])$ detti α e β l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in $[a,b]$ riesce*

$$\alpha \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \beta$$

COROLLARIO 3.2. *Se $f, g \in L([a,b])$ e riesce $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x)$ allora riesce*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

COROLLARIO 3.3. *Se $f \in L([a,b])$ riesce*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

TEOREMA 3.4. *Se $f \in L([a,b])$ ed é continua*

$$\exists \xi \in [a,b]:\ \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

TEOREMA 3.5. *Se $f \in L([a,b])$ ed é continua*

$$\forall x \in [a,b]:\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \to \quad \begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(a) = o \end{cases}$$

Proposizione 3.6. *Se* $f \in L([a,b])$ *ed é continua e se* $\Phi'(x) = f(x)$ *allora*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$