ANALISI

Estremi inferiore e superiore

Esistenza, unicitá

Estremo superiore

Consideriamo, per ogni $n = 0, 1, 2, ...$ i numeri razionali

$$(1) \qquad 0, \pm\frac{1}{2^n}, \pm\frac{2}{2^n}, \pm\frac{3}{2^n}, ... \pm\frac{k}{2^n}, ... \qquad k \in Z$$

Per $n = 0$ si tratta dei punti a coordinate intere, per $n = 1$ agli interi si aggiungono i razionali con denominatore 2, per $n = 2$ si aggiungono ai precedenti anche i razionali con denominatore 4 ecc.

Per ogni n i corrispondenti punti sono distribuiti lungo la retta equidistanti, a distanza $\frac{1}{2^n}$ uno dall'altro.

Sia E un insieme non vuoto e limitato: tra i numeri (1) indichiamo con A_n e B_n rispettivamente

- il piú grande che non sia un maggiorante di E, cioé il piú grande che riesca minore di almeno un $x \in E$,
- il piú piccolo che sia un maggiorante di E.

Nelle tre figure 1 seguenti l'insieme E é rappresentato in rosso e riesce

$$A_0 = 2,\ B_0 = 3, \quad A_1 = 2.5,\ B_1 = 3, \quad A_2 = 2.75,\ B_2 = 3$$

nella terza figura i punti a denominatore 4 sono solo indicati con una tacca intermedia,

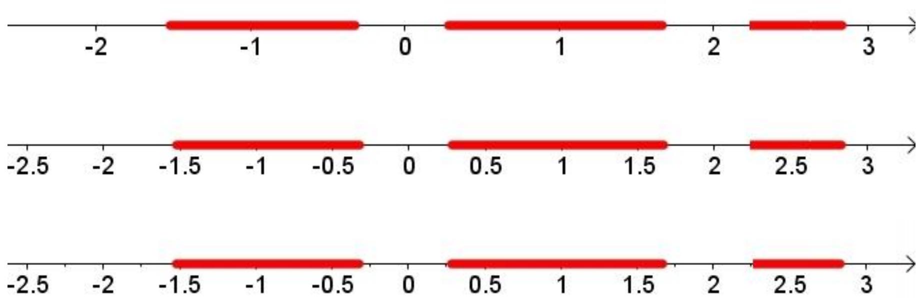

Figura 1. I numeri $A_0, A_1, A_2, ...$

I due elementi A_n e B_n sono naturalmente $A_n \leq B_n$ e successivi l'uno dell'altro

$$B_n - A_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Risulta

$$A_1 \leq A_2 \leq .... \leq A_n \leq B_n \leq .... \leq B_2 \leq B_1$$

ovvero gli intervalli

$$I_1 = [A_1, B_1], \quad I_2 = [A_2, B_2], \quad .... \quad I_n = [A_n, B_n], ...$$

sono chiusi, limitati, non vuoti e incapsulati.
Quindi, per la proprietá degli intervalli incapsulati, riesce

$$J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

L'insieme intersezione J, in quanto non vuoto, contiene almeno un punto Λ e si riconosce che non ne puó contenere altri: se infatti ne contenesse un altro $\alpha \neq \Lambda$ allora, tenuto conto che

$$J \subset [A_n, B_n] \quad \rightarrow \quad \alpha, \Lambda \in [A_n, B_n] \quad \rightarrow \quad |\alpha - \Lambda| \leq B_n - A_n$$

i due numeri α e Λ verificherebbero tutte le disuguaglianze

$$|\alpha - \Lambda| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

circostanza che, comé noto, implica $\alpha = \Lambda$, ovvero l' altro punto sarebbe ancora lo stesso Λ.
Il numero Λ, unico elemento dell'intersezione J é l'estremo superiore di E: infatti

- Λ é un maggiorante di E: se infatti per assurdo esistesse un $x_0 \in E$ tale che $\Lambda < x_0$ allora ci sarebbero alcuni A_n che supererebbero Λ, cosa impossibile perché

$$A_n \leq \Lambda \leq B_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- ogni numero $\lambda < \Lambda$ non puó essere un maggiorante per E: se lo fosse allora esisterebbero dei B_n vicini a λ e, quindi minori di Λ, cosa impossibile perché

$$A_n \leq \Lambda \leq B_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estremo inferiore

La prova dell'esistenza dell'estremo inferiore si ottiene con un procedimento analogo: si considerano, per ogni n, in luogo degli A_n e B_n precedenti i seguenti

- C_n il piú grande dei minoranti di E
- D_n il piú piccolo dei numeri che non sono minoranti di E.

Nel caso in figura 1 riesce quindi

$$C_0 = -2,\ D_0 = -1, \quad C_1 = -2,\ D_1 = -1.5, \quad C_2 = -1.75,\ D_2 = -1.5$$

Il resto é analogo:

- gli intervalli $[C_n, D_n]$ sono non vuoti, chiusi, limitati e incapsulati,
- la loro intersezione é quindi non vuota e contiene un solo punto,
- tale unico punto ha le proprietá di estremo inferiore di E.