CAPITOLO 1

Le derivate

Parte delle dispense di Funzioni di piú variabili utile a completare gli argomenti relativi alle funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trattati nelle ultime lezioni del Corso di Analisi.

1. Derivate parziali

Sia $f(x, y)$ definita nell'aperto A del piano $\mathbb{R}^2$. Se si tiene fissa la variabile $y = y_0$ e si fa variare *solo* la variabile x, si ottiene una funzione di una variabile.
Geometricamente questo corrisponde, ([2], pag. 26) a sezionare la superficie grafico della funzione con un piano $y = y_0$ verticale, parallelo all'asse x, passante per l'ordinata y_0 fissata.
La condizione di derivabilità di questa sezione corrisponde all'esistenza del limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il significato geometrico del limite di questo rapporto incrementale è la *pendenza* della superficie nella direzione dell'asse x.

Definizione 1.1. *La funzione f è* derivabile parzialmente rispetto ad *x nel punto (x_0, y_0) se esiste, finito, il limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con uno dei simboli seguenti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0).$$

Analogamente, f è derivabile parzialmente rispetto ad *y nel punto (x_0, y_0) se esiste, finito,*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il calcolo delle derivate parziali si fa con le stesse regole di derivazione delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: la/e variabile/i rispetto a cui non si deriva

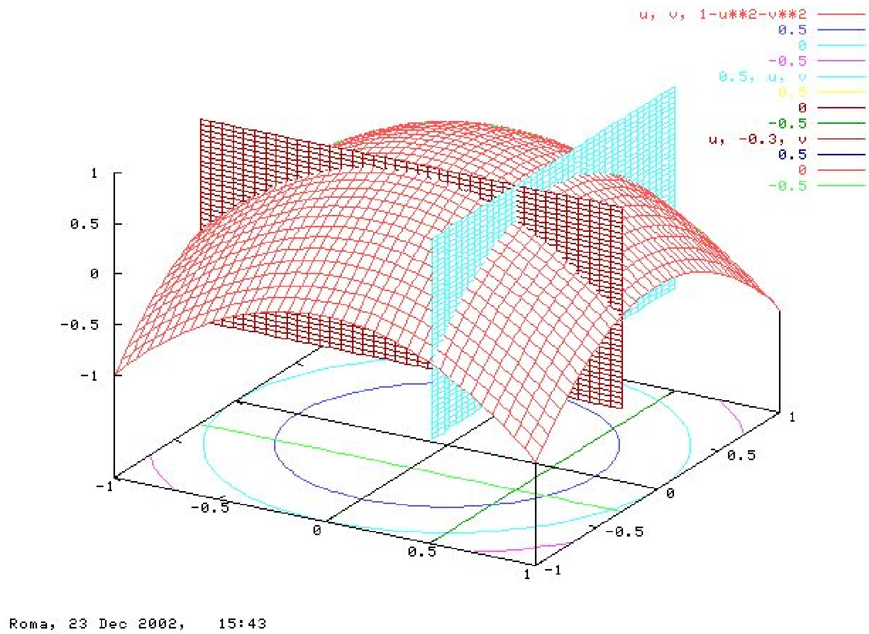

FIGURA 1. $z = 1 - x^2 - y^2, \quad x_0 = 0.5, \quad y_0 = -0.3$

sono trattate come costanti.
Ad esempio,

$$\begin{array}{llll} f(x,y) = x^2 + y^2 & \Longrightarrow & f_x(x,y) = 2x, & f_y(x,y) = 2y, \\ f(x,y) = x^3 y + y^2 & \Longrightarrow & f_x(x,y) = 3x^2 y, & f_y(x,y) = x^3 + 2y, \\ f(x,y) = \sin(x^2 y) & \Longrightarrow & f_x(x,y) = 2xy\cos(x^2 y), & f_y(x,y) = x^2\cos(x^2 y). \end{array}$$

Il vettore a due componenti,

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

è detto GRADIENTE DI f *(nel punto* (x_0, y_0)*)*[1].

OSSERVAZIONE 1.2. *Il gradiente di una* $f(x,y)$ *dotata di derivate parziali prime in ogni punto rappresenta un campo vettoriale, cioé una funzione*

$$\nabla : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ad ogni punto (α, β) *fa corrispondere un vettore* $(f_x(\alpha,\beta), f_y(\alpha,\beta))$ *In Figura 2 vedete disegnato, certamente in modo approssimativo, in corrispondenza di un reticolo abbastanza fitto di punti* (x_k, y_k) *di* $[-3,3] \times [-3,3]$ *le freccette che rappresentano il vettore gradiente della* $x^2 + y^2$

[1] Il simbolo ∇ si legge "nabla".

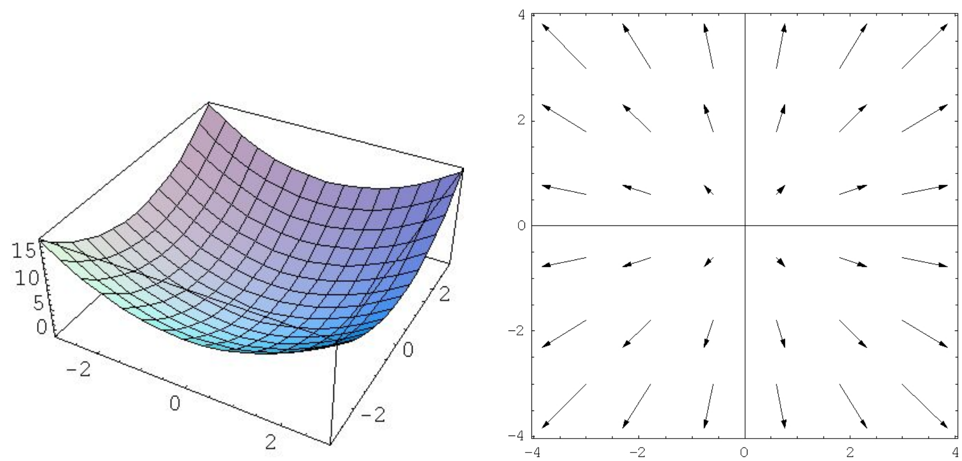

FIGURA 2. a) grafico di $x^2 + y^2$ b) il campo vettoriale dei gradienti

nel punto stesso.
Si riconosce ad esempio che

- *A* $(0, 0)$ *corrisponde il gradiente* $(0, 0)$
- *A* $(3, 3)$ *corrisponde un gradiente con le componenti uguali e positive*
- *A* $(3, -3)$ *corrisponde un gradiente con la prima componente positiva e la seconda negativa,*
- *ecc.*

OSSERVAZIONE 1.3. *Per indicare le derivate parziali si usa il simbolo* ∂ *("d storto") per ricordare che ci sono molte direzioni di derivabilità e che l'informazione che si ottiene con una singola derivata è una informazione parziale.*

2. La pendenza di una superficie secondo una direzione

La pendenza del grafico $y = g(x)$ di una funzione reale di una variabile reale ha un senso ben preciso: camminando sulla linea grafico nel verso delle x crescenti si percorre una salita o una discesa o si avanza orizzontalmente. Si puó misurare la pendenza affrontata tramite il coefficiente

angolare della retta tangente.
La pendenza di una superficie $u = f(x, y)$ non ha altrettanto significato preciso: si puó, durante un'escursione in montagna, camminare su una costa faticando a salire, scivolando in discesa, mantenendosi (come la maggioranza dei sentieri) *in quota*.
Non ha quindi senso parlare della pendenza della costa, dipendendo questa dalle direzioni lungo le quali ci si muove su di essa (naturalmente si puó parlare della pendenza massima).
Le osservazioni fatte precedentemente circa le sezioni del grafico di $f(x, y)$ giustificano la seguente osservazione:

OSSERVAZIONE 2.1. *La derivata parziale*

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0}$$

rispetto ad x misura la pendenza della superficie $u = f(x, y)$ nella direzione dell'asse x.
Analogamente la derivata parziale

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0}$$

rispetto ad y misura la pendenza della superficie $u = f(x, y)$ nella direzione dell'asse y.

2.1. Un problema:

Assegnata la superficie $z = f(x, y)$ e scelto un suo punto

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

lungo quale direzione si incontra la pendenza maggiore ?
Proviamo a risolvere il problema nel caso che la superficie sia il piano $z = ax + by + c$.
Supponiamo di partire dal punto $(0, 0)$: siamo a quota c. Andiamo, fatto uno spostamento di lunghezza ρ nella direzione dell'angolo α, nel punto $(\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha))$: la quota raggiunta é

$$a\,\rho\cos(\alpha) \,+\, b\,\rho\sin(\alpha) \,+\, c$$

La quota é variata dalla iniziale quota c della quantitá

$$\rho(a\,\cos(\alpha) \,+\, b\,\sin(\alpha))$$

che puó essere

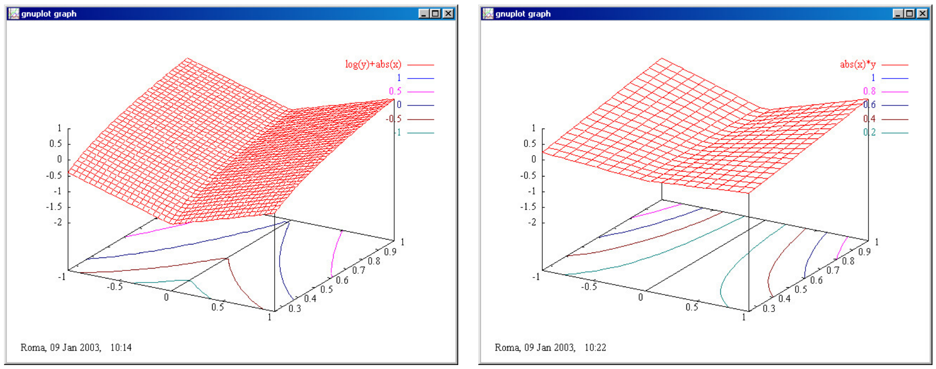

FIGURA 3. a)$f(x,y) = \ln(y) + |x|$, b) $f(x,y) = |x|y$

- positiva se $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ hanno rispettivamente gli stessi segni di a e b
- nulla se, sempre ad esempio,

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\alpha) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- negativa se $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ hanno segni opposti a quelli di a e b

Un problema (semplice ma non banale) é riconoscere l'angolo α lungo il quale il cambio di quota é maggiore: dove pensate che scivoli una goccia d'acqua su tale piano ?
Avete notato che direzioni propongono in ogni punto i vari gradienti disegnati in Figura 2 ?
E naturalmente avrete notato il legame con il grafico di x^2+y^2 disegnato a fianco.

ESEMPIO 2.2. *Data la funzione $f(x,y) = |x|y$, in quali punti esistono f_x e f_y? In tali punti calcolare ∇f.*

2.2. I grafici... Sono stati eseguiti con GnuPlot

```
gnuplot> f(x,y)=log(y)+abs(x)
gnuplot> set xrange [-1:1]
gnuplot> set yrange [0.25:1]
gnuplot> set zrange [-2:1]
gnuplot> splot f(x,y)
```

Analoga serie di comandi per la seconda funzione.
La scelta del dominio dove far variare la x , la y e la quota z si trova nella tendina `Axes`.

Notate sul piano (x, y) le linee: sono linee di livello della funzione considerata (la linea blu é quella dei punti in cui $f(x, y) = 1$, la viola é quella in cui $f(x, y) = 0.5$ ecc.)
La tendina 3D contiene varie scelte relative alle linee di livello: provate...
Notate lo spigolo del grafico lungo i punti con $x = 0$ sui quali la funzione non ha una delle due derivate parziali.

3. Le derivate parziali: prime, seconde,...

Analogamente al caso di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, è possibile ([2], pag. 32) definire, per le $f(x, y)$ le *derivate parziali successive* .
Supponiamo che la funzione f ammetta derivate rispetto ad x e rispetto ad y, cioè che siano definite le funzioni f_x e f_y: le funzioni f_x e f_y sono funzioni di due variabili che possono essere a loro volta derivabili parzialmente.
Una funzione di due variabili ammette (al più) due derivate prime (cioè f_x e f_y) e (al più) quattro derivate seconde:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x, y) = x^3 y + y^2$. Allora

$$f_x = 3x^2 y, \qquad f_y = x^3 + 2y,$$

$$f_{xx} = 6xy, \qquad f_{xy} = 3x^2, \qquad f_{yx} = 3x^2, \qquad f_{yy} = 2.$$

Chiaramente è possibile definire anche le derivate terze, quarte, ... di una funzione f. Nel caso $f(x, y) = x^3 y + y^2$,

$$f_{xxx} = 6y, \qquad f_{xxy} = 6x, \qquad f_{xyx} = 6x, \qquad f_{xyy} = 0,$$

$$f_{yxx} = 6x, \qquad f_{yxy} = 0, \qquad f_{yyx} = 0, \qquad f_{yyy} = 0.$$

Esempio 3.1. *Calcolare le derivate prime, seconde e terze di* $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

Esempio 3.2. *Quante derivate quarte ha una funzione di due variabili?*

Esempio 3.3. *Se una funzione f gode della simmetria rispetto alle due variabili, la proprietà $f(x, y) = f(y, x)$, quale legame intercorre tra le derivate prime, e tra le derivate seconde? E' possibile dedurre f_{yy} dall'espressione di f_{xx}?*

$\boxed{\textit{Risposte:}}$

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{f(y_0, x_0 + h) - f(y_0, x_0)}{h}$$

ne segue, passando al limite per $h \to 0$

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(y_0, x_0)$$

Non é detto tuttavia che le derivate parziali siano ancora funzioni simmetriche, si pensi, ad esempio alla $f(x,y) = x^2 + y^2$:

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y$$

due funzioni non simmetriche ($f_x(0,1) = 0, f_x(1,0) = 2.$ *)*
Nulla quindi puó dirsi sulle derivate seconde né tantomeno dedurre f_{xx} *da* f_{yy}.

3.1. Punti critici.

Si dicono punti critici o stazionari di una funzione $f(x,y)$ dotata di derivate parziali prime i punti

$$(x,y) | \begin{cases} f_x(x,y) & = 0 \\ f_y(x,y) & = 0 \end{cases}$$

Essi hanno un ruolo simile a quello svolto, nel caso di una variabile dai punti

$$x | f'(x) = 0$$

Esempio 3.4. *Sia* $f(x,y) = x^2 + y^2$: *c'é un solo punto stazionario, l'origine, infatti*

$$f_x = 2x = 0, \quad f_y = 2y = 0, \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

3.2. L'hessiano.

Definizione 3.5. *Data una funzione che ammette tutte le derivate seconde, la matrice*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

si dice matrice hessiana di f *(o semplicemente* hessiano di f*).*

Ad esempio,

(1) $$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y) \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)
$$f(x,y) = -x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f = (-2x, -2y) \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) $$f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, -2y) \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

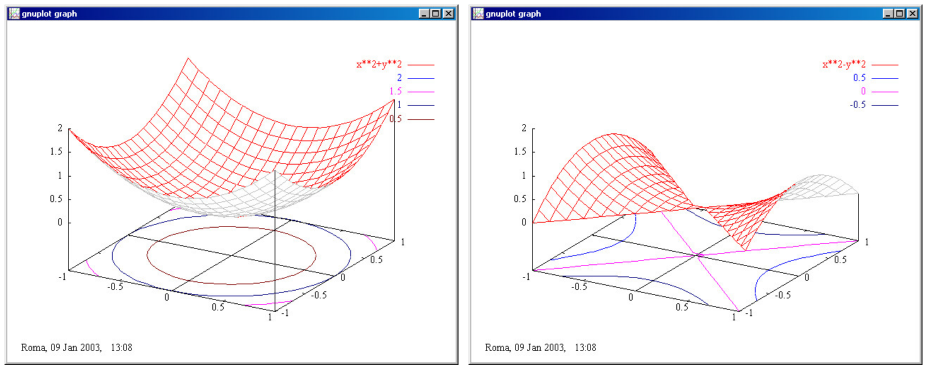

FIGURA 4. a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

La matrice hessiana di una funzione svolge un ruolo equivalente in più dimensioni a quello della derivata seconda nel caso di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: è collegata a proprietà di convessità/concavità della funzione o, più in generale, a proprietà di curvatura del grafico.
Nei casi scritti sopra, è particolarmente significativo che,

- la prima matrice, (1), ha autovalori positivi (e nel punto critico c'é il minimo),
- la seconda matrice, (2), ha autovalori negativi (e nel punto critico c'é il massimo),
- la terza, (3), ha un autovalore negativo e uno positivo (e nel punto critico c'é una sella), Figura 4.

Torneremo più avanti sulla questione.

CAPITOLO 2

Derivabilitá e continuitá

1. Introduzione

Contrariamente a quanto osservato nel caso di funzioni $f(x)$ di una sola variabile, l'esistenza delle derivate parziali f_x e f_y non garantisce la continuità delle funzioni di due o piú variabili ([2], pag. 34).
Le derivate parziali riguardano infatti la $f(x, y)$ ristretta alle due direzioni speciali indicate dagli assi cartesiani uscenti da ciascun punto (x_0, y_0) e trascurano quanto la funzione faccia su punti che non stiano su tali direzioni: le derivate parziali in un punto (x_0, y_0) danno solo proprietá delle due restrizioni di $f(x, y)$

$$f(x, y_0), \quad f(x_0, y)$$

Consideriamo un primo esempio *fondamentale* , quello della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (x,y) \in \quad \text{assi} \\ \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) \notin \quad \text{assi} \end{cases}$$

É evidente che $f(x, y)$ non é continua nell'origine: si trovano ovviamente punti (x, y), fuori degli assi, vicini all'origine quanto si voglia sui quali la funzione vale 1, come ovviamente punti altrettanto vicini, ma sugli assi, sui quali la funzione vale 0.
Tuttavia esistono nell'origine le due derivate parziali: infatti i due rapporti incrementali

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}, \quad \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

valgono, per $h \neq 0$ entrambi 0 e quindi hanno limite, 0.
Ovvero riesce

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

L'esempio mostra che una funzione puó avere in un punto anche entrambe le derivate parziali ed essere in tale punto addirittura discontinua.

Un secondo esempio *fondamentale* é

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

che abbiamo riconosciuta non continua nell'origine.
Le restrizioni di tale funzione sui due assi sono invece regolarissime:

$$f(x,0) \equiv 0, \quad f(0,y) \equiv 0$$

costantemente nulle !
Quindi $f(x,y)$ possiede le due derivate parziali nell'origine (entrambe nulle).

1.1. Il teorema di Lagrange.

Per le funzioni di una variabile derivabili vale il teorema di Lagrange o del valor medio

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi)$$

con ξ un punto medio tra x_1 e x_2.
Nel caso delle funzioni di due variabili dotate delle due derivate parziali prime, vale (quasi ovviamente) un risultato analogo che coinvolge... due punti medi !
Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti, supponiamo che la funzione $f(x,y)$ sia definita in tutto il rettangolo che ha i due punti come estremi,

$$f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) = [f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1)] + [f(x_2,y_1) - f(x_2,y_2)]$$

Basta ora gestire i due addendi a secondo membro con il teorema di Lagrange unidimensionale che conosciamo

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1) &= (x_1 - x_2) f'_x(\xi, y_1), \\ f(x_2,y_1) - f(x_2,y_2) &= (y_1 - y_2) f'_y(x_2, \eta) \end{aligned}$$

per ottenere

$$f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) = (x_1 - x_2) f'_x(\xi, y_1) + (y_1 - y_2) f'_y(x_2, \eta) \tag{4}$$

Esempio 1.1. *Sia $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$ e siano $(x_1,y_1) = (1,1)$ e $(x_2,y_2) = (3,4)$:*

$$f(3,4) - f(1,1) = [f(3,4) - f(3,1)] + [f(3,1) - f(1,1)] \tag{5}$$

Il primo addendo in parentesi quadra a secondo membro rappresenta la differenza dei valori della funzione

$$f(3,y) = 27 + 5y^2, \quad f'_y(3,y) = 10y$$

corrispondenti a $y_2 = 4$ *e* $y_1 = 1$*:*

$$f(3, y_2) - f(3, y_1) = f'_y(3, \eta)(y_2 - y_1) = 10\eta(4 - 1)$$

. Il secondo addendo, sempre in parentesi quadre nella (5), rappresenta la differenza dei valori della funzione

$$f(x, 1) = 3x^2 + 5, \quad f'_x(x, 1) = 6x$$

corrispondenti a $x_2 = 3$ *e* $x_1 = 1$

$$f(x_2, 1) - f(x_1, 1) = 6\xi(x_2 - x_1) = 6\xi\, 2$$

Ne segue,

$$f(3, 4) - f(1, 1) = 10\eta(4 - 1) + 6\xi\, 2$$

relazione che corrisponde alla (4) .

1.2. Una condizione di continuitá.

TEOREMA 1.2. *Una funzione* $f(x, y)$

- *dotata delle due derivate parziali prime in tutti i punti di un rettangolo (aperto)* D
- *derivate entrambe limitate*

$$|f_x(x, y)| \le M, \quad |f_y(x, y)| \le M, \quad \forall (x, y) \in D$$

é Lipschitziana (quindi continua) in D*.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $(x, y), \quad (x + h, y + k) \in D$
Stimiamo la differenza $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ come indicato dalla precedente formula (4) di Lagrange.
Tenuto conto che le derivate sono maggiorate dalla costante M si ha

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| \le M(|h| + |k|) \le 2M\sqrt{h^2 + k^2}$$

ovvero

$$|f(P) - f(Q)| \le 2M\overline{PQ}, \quad \forall P, Q \in D$$

□

Quale delle due ipotesi del precedente teorema non verificava la funzione dell'esempio fondamentale precedentemente richiamata ?

2. Grafici piú o meno regolari

La superficie grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puó essere dolcemente priva di pieghe o spigoli tanto da essere, almeno localmente, approssimabile soddisfacentemente con un piano, come accade ad esempio con una porzione di superficie sferica, oppure puó presentare spigoli, come accade con una superficie poliedrica.
La dolce regolaritá del primo caso si chiama, tecnicamente, differenziabilitá, ed é precisabile al modo seguente

DEFINIZIONE 2.1. *Una funzione $f(x, y)$ si dice differenziabile nel punto (x_0, y_0) se il valore $f(x, y)$ nei punti vicini a (x_0, y_0) si puó esprimere come somma*

$$f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y) \tag{6}$$

- *del valore $f(x_0, y_0)$ preso nel punto (x_0, y_0)*
- *di una parte lineare $A(x - x_0) + B(y - y_0)$*
- *e di un ulteriore addendo, $R(x, y)$, che diremo resto, infinitesimo d'ordine superiore a 1 rispetto alla distanza*

  $$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

  tra (x, y) e (x_0, y_0), cioé tale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \tag{7}$$

ESEMPIO 2.2. *La funzione $f(x, y) = 3x + 5y + 1$ é differenziabile in ogni punto (x_0, y_0) : infatti*

$$3x + 5y + 1 = 3x_0 + 5y_0 + 1 + 3(x - x_0) + 5(y - y_0)$$

in questo caso il terzo addendo, quello che doveva essere infinitesimo d'ordine superiore alla distanza, é addirittura nullo.
Una verifica piú ovvia era pensare al grafico di $3x + 5y + 1$: un piano esso stesso...!

ESEMPIO 2.3. *La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, é differenziabile in ogni punto (x_0, y_0) : infatti*

$$(x^2 + y^2) = (x_0^2 + y_0^2) + (x - x_0)(x + x_0) + (y - y_0)(y + y_0) =$$
$$= (x_0^2 + y_0^2) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

I due addendi

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

sono la parte lineare, il terzo, il resto,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

é esattamente il quadrato della distanza, é quindi infinitesimo di ordine 2, superiore a 1, rispetto alla distanza.

ESEMPIO 2.4. *La funzione $|x + y|$ non é differenziabile nell'origine, come pure in tutti i punti della retta $x + y = 0$; piú che una di-*

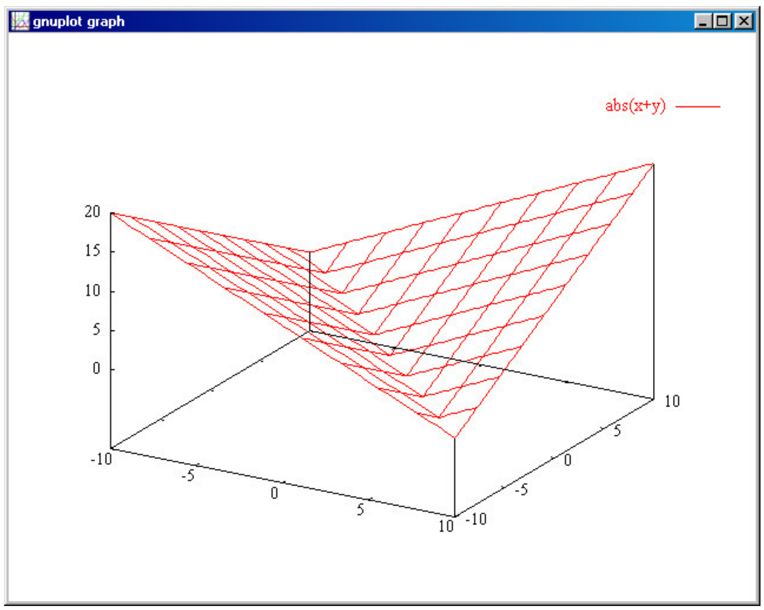

FIGURA 1. La funzione $|x + y|$ non é differenziabile

mostrazione basta guardare la superficie grafico, vedi Figura 1: due piani che si incontrano ad angolo proprio in corrispondenza dei punti della retta $x + y = 0$

3. Differenziabilitá, continuitá, derivate parziali

3.1. Continuitá. Le funzioni $f(x, y)$ differenziabili sono continue: infatti la differenza

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y) \tag{8}$$

si esprime con tre addendi (i due lineari e il *resto*) tutti piccoli se piccola é la distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

3.2. Il differenziale. La differenza $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ si dice incremento della funzione f da (x_0, y_0) a (x, y) e si indica spesso con $\triangle f$. La somma dei due addendi $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ che compaiono nell'espressione (6) prende il nome di

differenziale della funzione f *nel punto* (x_0, y_0)

e si indica con df.
La differenziabilitá ([2], pag. 40) si riduce quindi a riconoscere che le due quantitá $\triangle f$ e df sono, se $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, molto simili, simili al punto da riuscire

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\triangle f - df}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

3.3. Derivate parziali prime. Se $f(x, y)$ é differenziabile,dalla (8), bloccato y alla quota y_0 segue

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + R(x, y_0)$$

ovvero

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = A + \frac{R(x, y_0)}{x - x_0} \tag{9}$$

Quando $x \to x_0$ il secondo addendo a secondo membro della (9) va a 0 e quindi riesce

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = A$$

Cioé

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0}$$

Ovviamente analogo discorso per la derivata parziale rispetto ad y :

$$B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0,y_0}$$

Riassumendo: Se f é differenziabile nel punto (x_0, y_0) allora:

- esistono le due derivate parziali prime $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$

- i due coefficienti A e B che compaiono nell'espressione (8) coincidono rispettivamente con $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$.
- Una funzione che non possieda anche una sola delle due derivate parziali prime non puó essere differenziabile.

4. Sono molte le funzioni differenziabili ?

Si tratta di una domanda importante perché la differenziabilitá é un requisito di regolaritá richiesto quasi sempre nel calcolo, mentre finora conosciamo pochissime funzioni che lo possiedano.
Il seguente teorema, di cui potete anche trascurare la dimostrazione, fornisce una condizione sufficiente di differenziabilitá, molto importante:

TEOREMA 4.1 (Condizione sufficiente). *Una funzione $f(x, y)$ continua e dotata di derivate parziali continue nell'aperto Ω é differenziabile in ogni punto di Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema di Lagrange, vedi il precedente Capitolo 5, si ha

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0)$$

La stessa strategia usata nell'esempio (2.3) consente

(10)
$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad + \\ + \quad (f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0))(y - y_0) \end{aligned}$$

I primi due addendi a secondo membro della (10) forniscono i contributi lineari, per quanto concerne il terzo gruppo di addendi, quello nella seconda riga, esso ha il ruolo di *resto* nella formula (6): osserviamo infatti che

- i fattori $[f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$ e $[f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)]$ sono infinitesimi con la distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ per la continuitá delle due derivate parziali,
- i fattori $x - x_0$ e $y - y_0$ sono infinitesimi del primo ordine rispetto alla distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,
- quindi la somma di seconda riga della (10) é infinitesima d'ordine superiore alla distanza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

$\square$

Conseguenze

- tutte le funzioni rappresentate da polinomi sono differenziabili
- tutte le funzioni rappresentate da espressioni razionali sono differenziabili (naturalmente nei punti in cui sono definite)
- tutte le funzioni $f(x,y) = a(x).b(y)$ ottenute a partire da due funzioni a e b di classe C^1 sono differenziabili...
- sommando, sottraendo, moltiplicando o dividendo (prudenza...) due funzioni di classe C^1 si ottengono funzioni differenziabili.

5. Il piano tangente

La condizione di differenziabilitá di una funzione $f(x,y)$ in un punto (x_0, y_0) corrisponde, esattamente all'idea intuitiva di esistenza del piano tangente alla superficie grafico in quel punto ([2], pag46) .
L'insieme definito da

$$\pi : \quad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{11}$$

rappresenta un piano dello spazio ed è il piano, vedi Figura 2, che meglio approssima il grafico di f vicino al punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

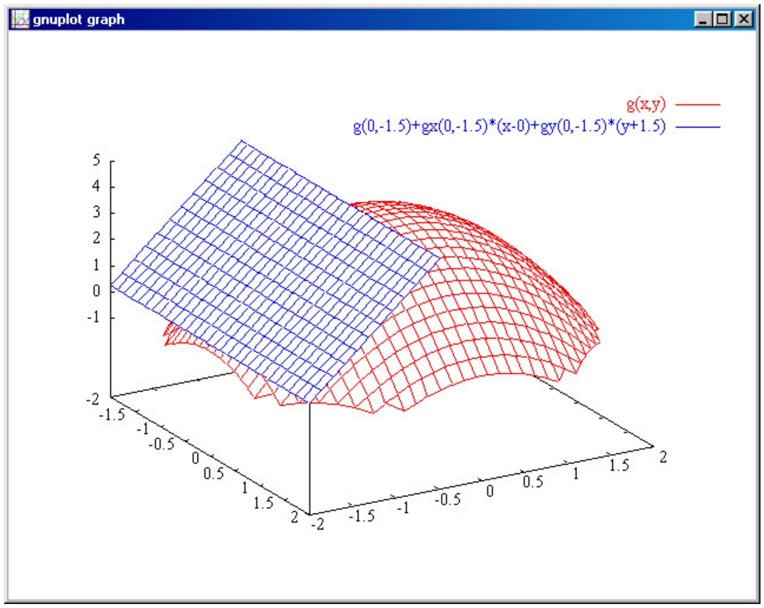

FIGURA 2. $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2, \quad (x_0, y_0) = (0, -1.5)$

L'ipotesi di differenziabilitá garantisce infatti che la differenza

$$|f(x,y) - z|$$

sia infinitesima di ordine superiore alla distanza ovvero che il grafico di $f(x,y)$ differisca, in un intorno di (x_0, y_0), da quello del piano (11) per una quantitá, quella che abbiamo chiamato nelle (6), *resto*, $R(x,y)$, infinitesima d'ordine superiore alla distanza tra (x,y) e (x_0, y_0).

Per questo il piano π definito da (11) è il *piano tangente* al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

ESEMPIO 5.1. *Il piano tangente al grafico di* $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ *nel punto di coordinate* $(0,1,4)$*, vedi Figura 3, ha equazione*

$$z = 8y - 4,$$

dato che $\nabla f = (6x, 8y), \quad \nabla f(0,1) = (0,8).$

ESEMPIO 5.2. *Il piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *nel punto* $(0,0,0)$ *é il piano, vedi Figura 4,* $z = 0$ *: la sua posizione rispetto al grafico di* f *puó destare qualche sorpresa, specie a chi pensi (sempre e solo) alla figura tradizionale del piano tangente ad una sfera. Un piano tangente puó tagliare la superficie, come del resto facevano le rette tangenti nei punti di flesso.*

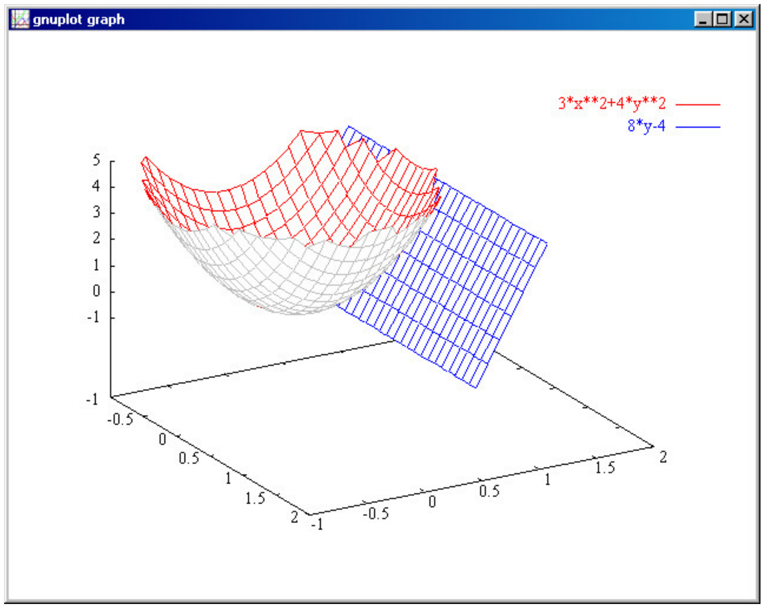

FIGURA 3. $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2, \quad (0, 1, 4), \quad z = 8y - 4$

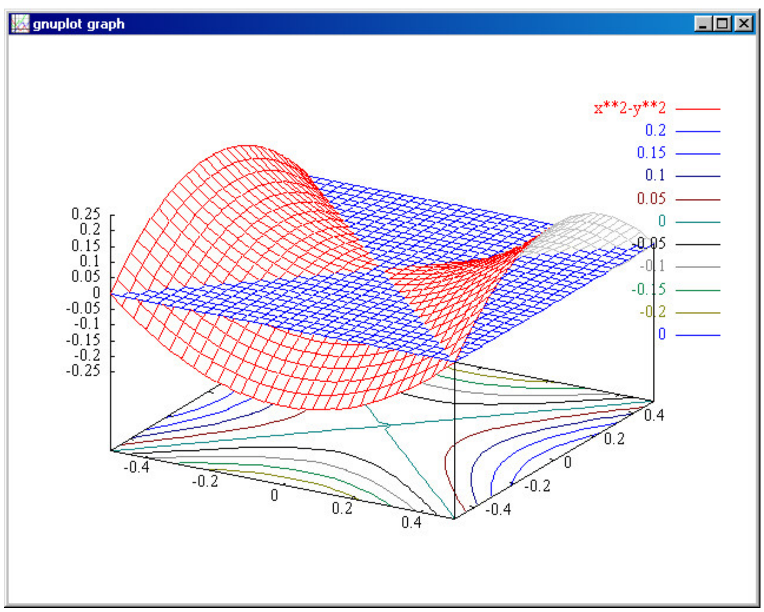

FIGURA 4. La sella $x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$ tangente nell'origine

Che $z = 0$ sia il piano che meglio approssima x^2-y^2 vicino all'origine si puó verificare ad esempio ricorrendo alle coordinate polari: la distanza tra la quota $z = f(x, y)$ del grafico e la quota $z = 0$ del piano tangente,si *maggiora come segue*

$$|(x^2 - y^2) - 0| = \rho^2 |(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))| \leq 2\rho^2$$

é quindi, effettivamente, infinitesima d'ordine 2 *rispetto alla distanza* $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ *di* (x, y) *da* $(0, 0)$.

Esempio 5.3. *Per quali* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *il piano tangente al grafico di* $f(x, y) = ax^2 + bxy + c$ *nel punto di coordinate* $(1, 1, f(1, 1))$ *ha equazione* $z = x - y$*?*
Il piano tangente é, vedi formula (11) il seguente

$$f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} f_x(1,1) & = 2a + b \\ f_y(1,1) & = b \\ f(1,1) & = a + b + c \end{cases}$$

deve riuscire $a + b + c + (2a + b)(x - 1) + b(y - 1) = x - y$ *che implica*

$$\begin{cases} 2a + b & = 1 \\ b & = -1 \\ -a + c - b & = 0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0$$

5.1. Sezioni grafico e piano tangente. La sella di Figura 4 con il suo piano tangente rappresenta una configurazione non comune almeno fin quando si immagini sempre e solo superfici simili alla sfera: la superficie che si schiaccia sul piano tangente restando interamente in uno dei due semispazi determinati dal piano tangente stesso.
Le figure seguenti rappresentano i profili altimetrici della $x^2 - y^2$ relativi a diverse rette $y = m\,x$: in relazione ad alcuni si hanno curve convesse verso l'alto, in corrispondenza ad altre curve convesse verso il basso...

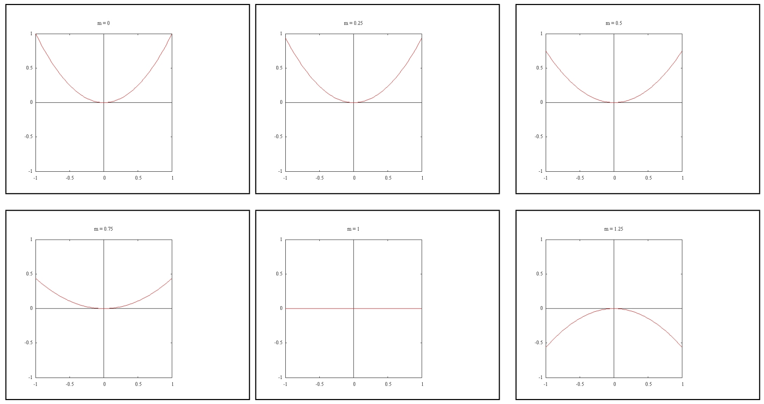

FIGURA 5. Le sezioni relative alle rette $y = mx, \quad m = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25$

6. Una caratterizzazione delle derivate

Supponiamo di sapere che in un punto (x_0, y_0) riesca

$$f(x,y) = c + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

Allora in tale punto riesce:

- $f(x_0, y_0) = c$
- $f_x(x_0, y_0) = a$
- $f_y(x_0, y_0) = b$

ESEMPIO 6.1. *Quanto vale la derivata $f_x(0,0)$ della funzione*

$$f(x,y) = \sin\left(\sin^2(x^3 + y^5)\right) \quad ?$$

É facile, 0 : infatti

$$|f(x,y)| \leq |x^3 + y^5|^2 \leq (x^2 + y^2)^3$$

da cui

$$f(x,y) = o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

e quindi... $c = a = b = 0$.

CAPITOLO 3

La derivazione delle funzioni composte

1. Introduzione

Sia $u = f(\phi, \psi)$ e supponiamo di esprimere

$$\phi = \phi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$$

Sia $F(x, y) = f[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ la funzione composta [1] ([2], pag 53)

TEOREMA 1.1 (continuitá). *Componendo funzioni continue si genera una funzione continua.*

DIMOSTRAZIONE. ...ovvia ! □

TEOREMA 1.2. *La composizione di funzioni differenziabili produce funzioni differenziabili.*

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi di differenziabilitá di $u = f(\phi, \psi)$ si ha

$$\Delta u = f_\phi \Delta\phi + f_\psi \Delta\psi + R(\Delta\phi, \Delta\psi) \tag{12}$$

essendo

$$R(\Delta\phi, \Delta\psi) = o(\sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2})$$

Tenuto conto della differenziabilitá delle due funzioni $\phi = \phi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ si ha

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_x \Delta x + \phi_y \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \\ \Delta\psi = \psi_x \Delta x + \psi_y \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \end{cases} \tag{13}$$

ove i termini indicati con $o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ rappresentano i resti, infinitesimi d'ordine superiore alla distanza.
Il simbolo usato o si legge *o piccolo* .
Sostituendo le (13) nella (12) si ha

$$\begin{aligned} \Delta u = & \left[f_\phi \phi_x + f_\psi \psi_x\right] \Delta x + \left[f_\phi \phi_y + f_\psi \psi_y\right] \Delta y + \\ & + (f_x + f_y) o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) + R(\Delta\phi, \Delta\psi) \end{aligned} \tag{14}$$

Dalle (13) riesce, di conseguenza

[1] La composizione richiede alcune condizioni di compatibilitá tra la f e le funzioni con la quale si vuole comporre...

$$\begin{cases} |\Delta\phi|^2 \leq M^2\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right) \\ \\ |\Delta\psi|^2 \leq M^2\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right) \end{cases} \tag{15}$$

con M costante opportuna.
Dalle (15) discende quindi che

$$\frac{R(\Delta\phi,\Delta\psi)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{R(\Delta\phi,\Delta\psi)}{\sqrt{(\Delta\phi)^2+(\Delta\psi)^2}}\frac{\sqrt{(\Delta\phi)^2+(\Delta\psi)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \leq$$

$$\leq M\sqrt{2}\frac{R(\Delta\phi,\Delta\psi)}{\sqrt{(\Delta\phi)^2+(\Delta\psi)^2}}$$

Da cui si riconosce che, essendo $R(\Delta\phi,\Delta\psi)$ infinitesimo d'ordine superiore a $\sqrt{(\Delta\phi)^2+(\Delta\psi)^2}$, é infinitesimo d'ordine superiore anche a $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$
Ne segue che gli addendi della seconda riga della (14) costituiscono un infinitesimo d'ordine superiore a $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ e quindi

(16)
$$\Delta u = [f_\phi\phi_x + f_\psi\psi_x]\,\Delta x + [f_\phi\phi_y + f_\psi\psi_y]\,\Delta y + o\left[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right]$$

Ricordato che i coefficienti di Δx e di Δy devono essere le derivate parziali, si deduce la (attesa) regola di derivazione delle funzioni composte:

$$F_x = f_\phi\phi_x + f_\psi\psi_x, \quad F_y = f_\phi\phi_y + f_\psi\psi_y$$

□

1.1. Il caso piú semplice. Componiamo una funzione $f(\phi)$ continua e derivabile di una sola variabile con una $\phi(x,y)$ differenziabile:

$$F(x,y) = f[\phi(x,y)]: \quad \begin{cases} F_x(x,y) = f'[\phi(x,y)]\phi_x(x,y), \\ \\ F_y(x,y) = f'[\phi(x,y)]\phi_y(x,y) \end{cases}$$

Esempio 1.3. $f(\phi) = \sin(\phi)$, $\phi(x,y) = x^2+y^2$, $F(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(x^2+y^2) = \cos(x^2+y^2)\,2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin(x^2+y^2) = \cos(x^2+y^2)\,2y$$

1.2. Il caso intermedio. Componiamo una funzione $f(\phi, \psi)$ con due funzioni $\phi(t), \quad \psi(t)$ di una sola variabile:

$$F(t) = f[\phi(t), \psi(t)] : \quad F'(t) = f_\phi \phi'(t) + f_\psi \psi'(t)$$

Esempio 1.4. $f(\phi, \psi) = \ln(1 + \phi^2 + \psi^4)$

$$\frac{d}{dt} \ln(1 + \cos^2(t) + \sin^4(t)) = \frac{-2\cos(t)\sin(t) + 4\sin^3(t)\cos(t)}{1 + \cos^2(t) + \sin^4(t)}$$

1.3. Il caso generale. Componiamo una funzione $f(\phi, \psi)$ con due funzioni $\phi = \phi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$ $F(x, y) = f[\phi(x, y), \psi(x, y)]$,

$$\begin{cases} F_x(x, y) = & f_\phi \phi_x(x, y) + f_\psi \psi_x(x, y) \\ F_y(x, y) = & f_\phi \phi_y(x, y) + f_\psi \psi_y(x, y) \end{cases} \tag{17}$$

Esempio 1.5. *Il caso delle coordinate polari: sia*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} : \quad x = \rho\cos(\theta), \ y = \rho\sin(\theta)$$

$$F(\rho, \theta) = \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

Un calcolo diretto (possediamo l'espressione esplicita della funzione composta) produce

$$F_\rho(\rho, \theta) = \cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

Il risultato garantito dal teorema é invece

$$F_\rho = f_x x_\rho + f_y y_\rho = f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta) =$$

$$\cos(\theta)\left(\frac{-2\,x^3\,y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}\right) + \sin(\theta)\left(\frac{-2\,x^2\,y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Sostituendo, dovunque si incontrino, ad x e y le relative espressioni in ρ e θ si ha

$$\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 2\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 2\cos^4(\theta)\sin(\theta) =$$

$$= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin(\theta) = \cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

2. La variazione di funzioni composte

La regola di derivazione delle funzioni composte, nel caso di piú variabili, appare piú complessa di quanto non sia realmente.
Indichiamo nelle sottosezioni seguenti aspetti che aiutano a comprendere e a servirsi della regola di derivazione.

2.1. Input - Output. Il calcolo del valore di una funzione reale di due variabili reali $f(\phi, \psi)$ corrisponde ad un algoritmo che

- chiede due numeri ϕ e ψ come INPUT,
- produce un numero, $f(\phi, \psi)$ come OUTPUT.

$$f : (\phi_0, \psi_0) \quad \rightarrow \quad f(\phi_0, \psi_0)$$

Se cambio la coppia in input da (ϕ_0, ψ_0) a $(\phi_0+\Delta\phi,\ \psi_0+\Delta\psi)$ il risultato, supponendo che f sia differenziabile cambia, in prima approssimazione, il risultato $f(\phi_0, \psi_0)$ della quantitá

$$\Delta f = f_\phi(\phi_0, \psi_0)\Delta\phi + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\Delta\psi \tag{18}$$

Se a loro volta gli INPUT ϕ ed ψ sono l'OUTPUT di altre due funzioni, anch'esse differenziabili,

$$\phi = \phi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$$

e supponiamo di eseguire il calcolo a partire dalle due coppie

$$(x_0, y_0), \quad (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$$

avremo variazioni, sempre in prima approssimazione,

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_x(x_0, y_0)\Delta x + \phi_y(x_0, y_0)\Delta y, \\ \Delta\psi &= \psi_x(x_0, y_0)\Delta x + \psi_y(x_0, y_0)\Delta y, \end{aligned} \tag{19}$$

Componendo la (18) con le (19) si ha quindi

$$\begin{aligned} \Delta f = f_\phi(\phi_0, \psi_0)\left\{\phi_x(x_0, y_0)\Delta x + \phi_y(x_0, y_0)\Delta y\right\} + \\ + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\left\{\psi_x(x_0, y_0)\Delta x + \psi_y(x_0, y_0)\Delta y\right\} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \Delta f = \left[f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_x(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_x(x_0, y_0)\right]\Delta x + \\ + \left[f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_y x(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_y(x_0, y_0)\right]\Delta y \end{aligned}$$

Ricordato che il coefficiente di Δx rappresenta la derivata rispetto ad x e quello di Δy la derivata rispetto ad y si ha

$$\begin{aligned} f_x &= f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_x(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_x(x_0, y_0), \\ f_y &= f_\phi(\phi_0, \psi_0)\phi_y x(x_0, y_0) + f_\psi(\phi_0, \psi_0)\psi_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2.2. La formula mnemonica. La regola di derivazione delle funzioni composte si ricorda facilmente nella forma seguente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}$$

2.3. Lettura vettoriale.

La formula (17) si puó leggere anche in modo vettoriale chiamando con J la matrice 2×2

$$J = \begin{pmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_y & \psi_y \end{pmatrix}$$

Con tale notazione si ha

$$\nabla F = J\,\nabla f$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x(x,y) & \psi_x(x,y) \\ \phi_y(x,y) & \psi_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\phi[\phi(x,y),\psi(x,y)] \\ f_\psi[\phi(x,y),\psi(x,y)] \end{pmatrix}$$

formula che corrisponde, perfettamente alla precedente espressione *mnemonica.*

Nel caso delle coordinate polari

$$\xi = \rho\cos(\theta), \quad \psi = \rho\sin(\theta)$$

la matrice J é la seguente

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e infatti

$$\begin{pmatrix} F_\rho \\ F_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

3. Derivate direzionali

La derivata di una funzione $f(x,y)$ in un punto (x_0,y_0) secondo un'assegnata direzione ([2], pag. 43) é una generalizzazione di quanto proposto per le due derivate parziali.

Nel loro caso si consideravano rapporti incrementali lungo le direzioni dei due assi, perché non scegliere anche altre direzioni ?

- 1. assegnare il punto (x_0,y_0)
- 2. assegnare direzione e verso $\overrightarrow{n}$ su cui lavorare

  $$\overrightarrow{n} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

  assegnando cioé un *versore* [2] $\overrightarrow{n}$
- 3. incrementare (x_0,y_0) secondo tale direzione

  $$(x_0 + \rho\cos(\alpha), y_0 + \rho\sin(\alpha))$$

[2]Vettore di modulo unitario

- 4. cercare il limite

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos(\alpha),y_0+\rho\sin(\alpha))-f(x_0,y_0)}{\rho} \tag{20}$$

- 5. Il limite, supponendo che esista, si indica, con le notazioni

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}},\quad \frac{df}{d\overrightarrow{n}}$$

Se la funzione assegnata é differenziabile il limite (20) si elabora ulteriormente come segue:

- il numeratore si esprime come:

$$f_x(x_0,y_0)\rho\cos(\alpha)+f_y(x_0,y_0)\rho\sin(\alpha)+o(\rho)$$

  avendo indicato con $o(\rho)$ il resto,
- il rapporto incrementale proposto diviene pertanto

$$f_x(x_0,y_0)\cos(\alpha)+f_y(x_0,y_0)\sin(\alpha)+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

- riesce quindi

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos(\alpha),y_0+\rho\sin(\alpha))-f(x_0,y_0)}{\rho}=$$
$$=f_x(x_0,y_0)\cos(\alpha)+f_y(x_0,y_0)\sin(\alpha)$$

- Usando il gradiente si ha anche

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}}=\nabla f(x,y)\times\overrightarrow{n} \tag{21}$$

L'ultima formula indicata esprime la derivata direzionale delle funzioni differenziabili tramite un prodotto scalare: questa espressione agevola problemi quali decidere su quale direzione la derivata direzionale sia maggiore, su quali minore, quale puó essere il valore maggiore in modulo, ecc.

Esempio 3.1. *La derivata di* $f(x,y)=x^2+y^2$ *nel punto* $(1,2)$ *lungo la direzione*

$$\overrightarrow{n}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

corrisponde al limite

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f\left(1+\rho\frac{\sqrt{2}}{2},2+\rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f(1,2)}{\rho}$$

ovvero

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{3\rho\sqrt{2}+\rho^2}{\rho}=3\sqrt{2}$$

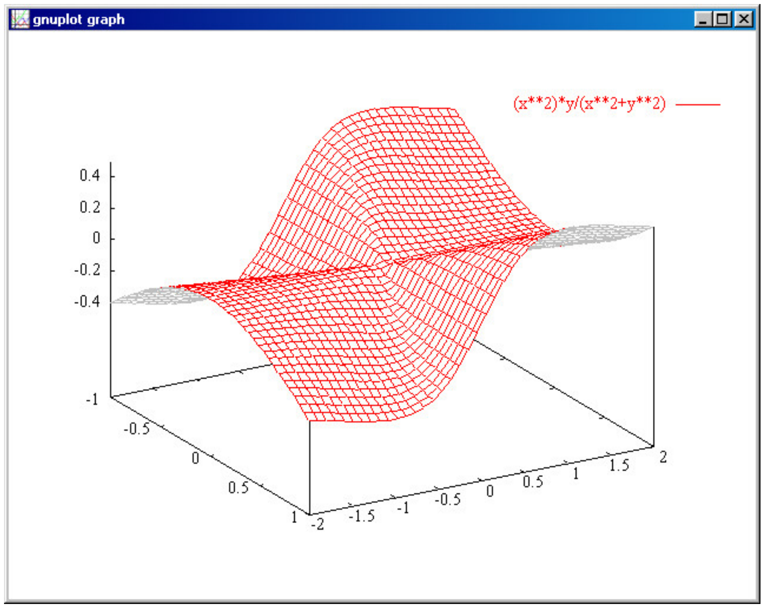

FIGURA 1. Derivabile ma non differenziabile: $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Il valore trovato corrisponde al seguente fenomeno altimetrico: una persona che camminasse sul grafico di x^2+y^2 partendo dal punto $(1, 2, 5)$ e muovendosi nella direzione NORD-EST, questa é di fatto la direzione indicata dal versore $\overrightarrow{n}$ assegnato, affronterebbe, al primo passo, una salita di un angolo φ con

$$\tan(\varphi) = 3\sqrt{2}, \quad \varphi \simeq 0.713724 \quad \textit{radianti}$$

piú o meno una pendenza di $77°$ gradi.

3.1. Un contresempio.

Una funzione non differenziabile f puó ammettere derivate direzionali. In tale caso tuttavia non accade necessariamente che la derivata direzionale si esprima con il comodo prodotto scalare $\nabla f(x, y) \times \overrightarrow{n}$

Si consideri ad esempio la funzione, vedi Figura 1, continua in tutto $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, \quad \text{con} \quad f(0, 0) = 0$$

riesce

$$\frac{f(\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha)) - f(0, 0)}{\rho} = \cos^2(\alpha)\sin(\alpha)$$

per cui, qualunque sia la direzione α riesce

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}}(0, 0) = \cos^2(\alpha)\sin(\alpha)$$

Tenuto conto che $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ ne segue che

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0,$$

la formula (21) avrebbe, usata a sproposito [3], dato come derivate direzionali

$$\nabla f(0,0) \times \overrightarrow{n} = 0$$

Esempio 3.2. *Sia $f(x, y) = x + y + 1$; indicare su quali direzioni le derivate direzionali valgono $(\sqrt{3} + 1)/2$:*

$$\nabla f(x, y) \times \overrightarrow{n} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Le direzioni relative agli angoli $\pi/6$, $\pi/3$ con l'asse delle x.

3.2. Un'applicazione.

Consideriamo la cupola grafico della funzione

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

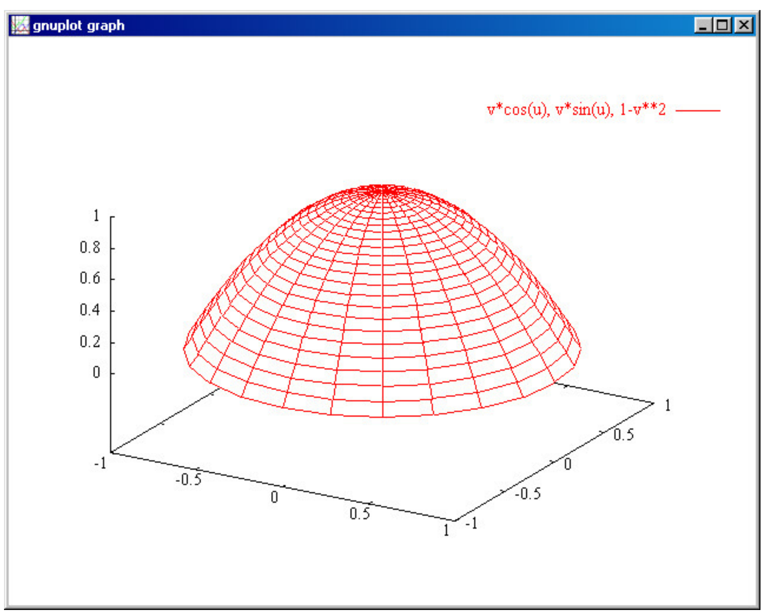

Figura 2. La cupola: $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

[3]Evidentemente $f(x, y)$ non é differenziabile nell'origine: se lo fosse stata la formula (21) avrebbe dovuto produrre gli esatti valori delle derivate direzionali calcolati direttamente prima !

essa tocca terra, cioé il piano xy, nei punti della circonferenza $x^2+y^2=1$.
Che pendenza attribuireste alla cupola, Figura 2, arrivando a terra ?
Non é una domanda banale: abbiamo giá osservato che parlare della pendenza di una superficie é una... superficialitá !
Tuttavia certamente molti, nella domanda precedente sottintendono la pendenza maggiore, quella che seguono le gocce di pioggia colando verso il basso, almeno supponendo la superficie della cupola perfettamente levigata.
Accogliamo tale scelta sottintesa e cerchiamo la pendenza maggiore tra quelle prodotte dalla formula precedente:

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n}} = f_x.\cos(\alpha) + f_y \sin(\alpha)$$

da cui, calcolate le due derivate parziali $f_x = -2x, \quad f_y = -2y$ si ha

$$\left|\frac{df}{d\overrightarrow{n}}\right| = 2\,|x.\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)|$$

Risultati:

- La derivata direzionale di modulo maggiore corrisponde al massimo del prodotto $|x.\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)|$
- Tale massimo si ottiene, tenuto conto che $x^2+y^2=1$ se

  $$\cos(\alpha) = x, \quad \sin(\alpha) = y$$

- La direzione di maggiore pendenza é quella del gradiente, che ha, come *verso*, quello corrispondente alla *salita*.

$\boxed{\text{Attenzione:}}$

La derivata direzionale della funzione $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, la cupola rovesciata precedente, nel punto $(1,0)$ secondo la direzione ad esempio della retta $y = -(x-1)$, direzione $(\cos(3*\pi/4), \sin(3*\pi/4))$, non é la derivata della funzione composta

$$\frac{d}{dx} f(x, -(x-1)), \quad x = 1 \tag{22}$$

ma é il limite

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{f(1+\rho\cos(3*\pi/4), \rho\sin(3*\pi/4)) - f(1,0)}{\rho} \tag{23}$$

Che le due formule siano diverse si riconosce calcolandole: la prima produce -2 la seconda $\nabla f(1,0) \times (\cos(3*\pi/4), \sin(3*\pi/4)) = \sqrt{2}$.

Dov'é la differenza ?
Sul tipo di rapporto incrementale: nella (22) si considera il

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,-h)-f(1,0)}{h} \tag{24}$$

nella (23), scritta usando lo stesso parametro h il limite é invece,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h\cos(3*\pi/4),h\sin(3*\pi/4))-f(1,0)}{h}$$

...simile, ma non uguale !
Nella (20) infatti a denominatore si trova esattamente la distanza tra il punto iniziale $(x_0.y_0)$ e il punto incrementato $(x_0+\rho\cos(\alpha),\, y_0+\rho\sin(\alpha))$.
Nella (24) invece la distanza tra punto iniziale e punto incrementato é $h\sqrt{2}$ mentre a denominatore c'é solo h !

3.3. Osservazioni ed esempi.

ESEMPIO 3.3. $f(x,y)=x^2-y^2$ *: la direzione* $\overrightarrow{n}$ *lungo la quale cercare la derivata sia determinata assegnando l'angolo* α*. Si ha*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{n}}(0,0)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\rho}\\&=\lim_{\rho\to 0}\rho(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0.\end{aligned}$$

Si faccia attenzione al limite finale: si tratta di un limite lungo una direzione fissata *(individuata da* α *che è fissato al principio). Questo limite non va confuso con il limite di funzioni di più variabili che tiene conto di* tutti i cammini possibili.

ESEMPIO 3.4. *Consideriamo* $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$*. Fissato* α*, vediamo se la funzione è derivabile nella direzione di* $\overrightarrow{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ *nel punto* $(0,0)$*. Dato che*

$$\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}=\frac{\sqrt{\rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\sin^2\alpha}}{\rho}=\frac{|\rho|}{\rho},$$

la derivata direzionale non esiste per nessuna scelta di α*.*

ESEMPIO 3.5. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

dimostrare che

(i) esiste $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}(0,0)$ *per ogni* $\overrightarrow{n}$*;*
(ii) f *non è continua in* $(0,0)$.

$\boxed{\textit{Soluzione.}}$ *(i) Sia, come sempre,* $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$*. Allora*

$$\frac{f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) - f(0,0)}{\rho} = \frac{\rho^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho(\rho^4\cos^4\alpha + \rho^2\sin^2\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Passando al limite per $\rho \to 0$*, si deduce che esiste la derivata direzionale e vale*

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}(0,0) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & \alpha \neq k\pi \\ 0 & \alpha = k\pi \end{cases} \qquad \textit{per } k \in Z.$$

(ii) Per riconoscere che la funzione non è continua [4]*, basta studiare i profili altimetrici lungo le rette per l'origine e lungo la parabola di equazione* $y = x^2$*, infatti lungo le rette* $y = mx$ *riesce*

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \to 0$$

mentre lungo la parabola riesce

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Dal momento che i limiti lungo profili altimetrici diversi sono diversi....

4. Il teorema del valor medio

Le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

di due (o piú) variabili beneficiano di un risultato naturale estensione del teorema di Lagrange incontrato nel caso delle funzioni $y = f(x)$ definite su intervalli $a \le x \le b$ ([2], pag. 66).
Consideremo d'ora in poi funzioni $u = f(x, y)$, a valori reali, che abbiano

[4] La stessa funzione é stata considerata nel paragrafo Passeggiare sul grafico di pagina **??**

- dominio di definizione D convesso [5].
- siano continue,
- abbiano derivate parziali prime continue.

Per calcolare la differenza

$$f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

consideriamo:

- una rappresentazione parametrica del segmento di estremi

$$(x_0,y_0), \quad (x,y)$$

$$\begin{cases} \xi = & x_0 + t(x - x_0), \\ \eta = & y_0 + t(y - y_0) \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

- la funzione composta

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)),$$

funzione di una variabile definita per $t \in [0,1]$

- la differenza

$$F(1) - F(0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

- se la funzione $f(x,y)$ possiede derivate parziali prime continue allora $F(t)$ é derivabile [6]

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) + \\ &+ f_y(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0) \end{aligned} \tag{25}$$

(quindi ad essa puó essere applicato il teorema di Lagrange in $[0,1]$).

Ogni algoritmo che rappresenti $F(1) - F(0)$ rappresenterá quindi

$$f(x,y) - f(x_0,y_0):$$

applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $F(t), t \in [0,1]$

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1 - 0)$$

Indicato con (ξ, η) il punto del segmento $(x,y), \quad (x_0,y_0)$ corrispondente al valore θ si ha

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = F(1) - F(0) = f_x(\xi,\eta)(x - x_0) + f_y(\xi,\eta)(y - y_0)$$

Il risultato osservato é riassunto nel seguente

---

[5] Ricordiamo che un insieme $D \subseteq R^2$ si dice convesso se contiene tutti i segmenti di cui contenga gli estremi (rettangoli, poligoni regolari, cerchi, ecc sono convessi, insiemi a ferro di cavallo non sono convessi, non sono convesse le corone circolari e tutti gli insiemi dotati di lacune)

[6] Teorema di derivazione delle funzioni composte

TEOREMA 4.1 (Teorema del valor medio). *La funzione $f(x,y)$ sia definita in un insieme D aperto* [7] *e convesso, sia continua e abbia le derivate parziali prime continue: comunque si prendano due punti (x_0, y_0) e (x, y) in D esiste almeno un punto (ξ, η) appartenente al segmento $(x_0, y_0), \quad (x, y)$ tale che*

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(\xi, \eta)(y - y_0)$$

OSSERVAZIONE 4.2. *Indicato con*

$$\overrightarrow{PP_0} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

il precedente Teorema 4.1 si puó scrivere come

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(\xi, \eta) \times \overrightarrow{PP_0}$$

OSSERVAZIONE 4.3. *Il teorema di Lagrange presentato nel Capitolo 5 é un risultato piú modesto di quello stabilito: la tradizionale tecnica di aggiungere e sottrarre uno stesso valore*

$$[f(x,y) - f(x, y_0)] + [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

esprime i due addendi, funzione ciascuno di una sola variabile, tramite il teorema di Lagrange unidimensionale:

$$f_y(x, \eta)(y - y_0) + f_x(\xi, y_0)(x - x_0)$$

L'espressione ottenuta é molto simile a quella stabilita precedentemente nel Teorema del Valor medio...
l'unica differenza é che le due derivate parziali non sono necessariamente calcolate nello stesso punto.
Il precedente Teorema non richiede del resto che $f(x,y)$ sia differenziabile ma solo che possieda in ogni punto le due derivate parziali.

COROLLARIO 4.4. *Una funzione $f(x,y)$ (continua con le derivate parziali in un convesso D) che abbia le due derivate parziali nulle é costante.*

DIMOSTRAZIONE. É evidente... essa é Lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 0$! □

COROLLARIO 4.5. *Una funzione $f(x,y)$ (continua con le derivate parziali in un convesso D) che abbia le due derivate parziali costanti*

$$f_x(x,y) = a, \quad f_y(x,y) = b$$

é un polinomio di primo grado

$$f(x,y) = ax + by + c$$

[7] Ricordate che tutti gli algoritmi di tipo differenziale funzionano nei punti interni, cioé in insiemi aperti...

DIMOSTRAZIONE.

$$g(x,y) = f(x,y) - ax - by$$

ha le derivate parziali prime nulle... quindi é costante ! □

5. Interpretazione geometrica

Fissati due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ consideriamo la curva C di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = & x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = & y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = & f\left[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)\right] \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

C é la sezione della superficie Σ grafico di $f(x,y)$ con il piano verticale determinato dai due punti $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$.
Indichiamo con $\overrightarrow{v}$ un vettore tangente alla curva e con $\overrightarrow{P_1P_2}$ il vettore che congiunge gli estremi

$$\overrightarrow{v} = \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ f_x\left[\ldots\right](x_2 - x_1) + f_y\left[\ldots\right](y_2 - y_1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \end{cases}$$

Il teorema del valor medio corrisponde, esattamente come osservato in una dimensione, alla presenza di un punto $(x_\theta, y_\theta, f(x_\theta, y_\theta)) \in C$ in cui la retta tangente alla curva é parallela alla corda determinata dai due estremi di C.

OSSERVAZIONE 5.1. *Per una curva $\mathcal{C}$ nello spazio di estremi A e B non é sempre vero che ci sia un punto $P \in \mathcal{C}$ in cui la tangente sia parallela al segmento AB (si pensi ad una elica, con estremi posti sulla stessa verticale...)*
Questo accade invece per i profili altimetrici precedenti... tenete infatti presente che essi sono curve piane. [8]

[8] Una curva piana é una curva interamente contenuta in un piano. Sono curve piane le circonferenze, non sono piane, in generale, le eliche.

CAPITOLO 4

Formula di Taylor

1. Introduzione

Approssimare una funzione vuol dire sostituire l'algoritmo, ritenuto difficile, che la definisce con un altro piú semplice e quindi piú facile a calcolarsi.
Il prezzo di questa sostituzione sta, naturalmente, nel fatto che cosí facendo si introduce una distorsione, un errore che si dice

errore di approssimazione.

L'approssimazione é tecnicamente interessante o accettabile se si conosce una stima dell'errore di approssimazione, stima che permetta di valutare se tale errore sia o meno tollerabile in relazione alle precisioni di calcolo richieste.
Considerato che

- i polinomi di primo grado sono calcolabili con grande facilitá,
- la maggioranza delle funzioni sono definite da algoritmi assai piú complessi

non deve stupire che le piú frequenti tecniche di approssimazione facciano ricorso a polinomi di primo grado.
In termini geometrici o di grafico tali approssimazioni sono semplicemente lo scambio del grafico della funzione con il grafico della retta, nel caso unidimensionale, o, nel caso bidimensionale lo scambio del grafico della funzione con il piano tangente.

Esempio 1.1. *Calcolare il valore di*

$$f(x, y) = 1 + \sin(x + y)$$

nel punto $x_0 = 0.01, y_0 = 0.02$.
É innegabile che

- *il punto* (x_0, y_0) *assegnato sia abbastanza vicino all'origine,*
- *il piano tangente al grafico della* $f(x, y)$ *nell'origine é*

$$z = 1 + x + y,$$

- *la tentazione di proporre come approssimazione di* $f(x_0, y_0)$ *proprio il valore* $1 + x_0 + y_0$ *é forte...*

- *forse l'errore di approssimazione che si commetterebbe é tutto sommato accettabile...!*

Problema 1.2. *Come stimare il precedente errore di approssimazione*

$$|f(x_0, y_0) - \{1 + x_0 + y_0\}|$$

in modo da poter decidere seriamente se esso sia o meno al di sotto della tolleranza che supponiamo sia stata assegnata ?

Osservazione 1.3. *Ricordate che la prima, piú semplice approssimazione di una funzione $f(x, y)$ é sempre quella fornita da un suo valore*

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0)$$

questo é il motivo per cui, quasi sempre le approssimazioni di $f(x, y)$ iniziano con

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + \dots$$

dove i puntini rappresentano correzioni via via piú precise.

Le approssimazioni che studieremo in questo capitolo si chiamano

polinomi di Taylor

polinomi... perché si tratta di polinomi.

2. La formula in una dimensione

Richiamiamo brevemente la costruzione dei polinomi di Taylor $P_k(t)$ associati, in un punto t_0 ad una funzione $f(t)$ indefinitamente derivabile:

$$\begin{array}{ll} P_1(t) = & f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ P_2(t) = & f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} f''(t_0)(t - t_0)^2 \\ \dots = & \dots \\ P_n(t) = & f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{[n]}(t_0)(t - t_0)^n \end{array}$$

Tali polinomi sono determinati da

- la funzione $f(t)$
- il punto t_0
- l'intero n

Il risultato fondamentale che rende interessanti tali polinomi ai fini dell'approssimazione é l'espressione della differenza che intercorre tra la funzione $f(t)$ e ciascuno dei polinomi $P_k(t)$

$$f(t) - P_k(t) = \frac{1}{(k+1)!} f^{[k+1]}(\tau)(t - t_0)^{k+1} \tag{26}$$

L'aspetto interessante della (26) é la possibilitá di stimare, di maggiorare, l'errore che intercorre tra il valore fornito da ciascuno dei $P_k(t)$ e il valore *vero* $f(t)$: supposto di conoscere che

$$\left| f^{[k+1]}(t) \right| \leq M$$

segue

$$|f(t) - P_k(t)| \leq \frac{M}{(k+1)!} \left| t - t_0 \right|^{k+1} \tag{27}$$

Esempio 2.1. *Si debba calcolare* $\sin(0.017)$: *serviamoci del primo* $(n = 1)$ *polinomio di Taylor relativo alla funzione* $\sin(t)$ *e a* $t_0 = 0$

$$P_1(t) = \sin(0) + \sin'(0)(t - 0) \to P_1(t) = t$$

Tenuto conto che

$$|\sin''(t)| \leq 1$$

si ha, dalla (27)

$$|\sin(t) - t| \leq \frac{1}{2} t^2 \quad \to \quad |\sin(0.017) - 0.017| \leq \frac{1}{2} 0.017^2 = 0.0001445$$

Qualora l'errore possibile incontrabile, 0.0001445 *apparisse troppo grosso si puó ricorrere all'approssimazione offerta dai polinomi di Taylor di grado maggiore*

$$\begin{array}{ll} P_2(t) = & t \\ P_3(t) = & t - \frac{1}{6}t^3 \\ P_4(t) = & t - \frac{1}{6}t^3 \\ P_5(t) == & t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Ad esempio

$$|\sin(t) - P_4(t)| \leq \frac{1}{120} t^5 \quad \to \quad \left| \sin(0.017) - 0.017 + \frac{1}{6} 0.017^3 \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{120} 0.017^5 = 1.183\, 10^{-11}$$

forse, quest'ultima, una discreta approssimazione !

3. La formula di Taylor in due variabili

Un ragionamento analogo a quello del precedente Teorema del valor medio o di Lagrange permette di riconoscere una stima dell'errore che si puó commettere approssimando una funzione $f(x, y)$ con il suo piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Supponiamo $f \in C^2(A)$, A convesso e siano

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P = (x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$$

il valore della funzione $f(P)$ può essere approssimato, approssimazione del piano tangente, con

$$f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0),$$

ovvero

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Quanto pesa il resto cioé l'errore di approssimazione

$$R = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k \quad ?$$

Consideriamo la funzione di una variabile t

$$F(t) = f\big(x_0 + th, y_0 + tk\big) \qquad t \in [0, 1].$$

funzione composta della f e della rappresentazione parametrica del segmento $\overline{P_0P}$.
I valori della $F(t)$ per $t \in [0, 1]$ sono i valori della f sui punti del segmento da (x_0, y_0) a $(x_0 + h,\ y_0 + k)$.
Dato che f è di classe C^2, il Teorema di derivazione delle funzioni composte garantisce che $F \in C^2([0, 1])$.
La funzione $F(t)$ sará quindi sviluppabile in formula di Taylor di punto iniziale $t_0 = 0$ e ordine $n = 2$

$$F(t) = F(0) + F'(0)\, t + \frac{1}{2}F''(\theta)t^2$$

con $\theta \in [0, t]$ opportuno.
Scelto $t = 1$ si ha quindi

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta). \tag{28}$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} F(1) = & f(x_0+h, y_0+k), \\ F(0) = & f(x_0, y_0), \\ F'(0) = & f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k. \end{cases}$$

e tenuto conto della formula di derivazione delle funzioni composte, indicato con $P_t = (x_0 + th, y_0 + tk)$, segue

$$\begin{cases} F(t) = & f(P_t), \\ F'(t) = & f_x(P_t)h + f_y(P_t)k, \\ F''(t) = & f_{xx}(P_t)h^2 + 2f_{xy}(P_t)hk + f_{yy}(P_t)k^2 \end{cases}$$

grazie al fatto che, per il Teorema di Schwarz, $f_{xy} = f_{yx}$ nel caso di $f \in C^2$,.

Calcolando in $t = \theta$ e sostituendo in (28) otteniamo

$$\begin{aligned} f(P) =& f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k \\ &+ \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(P_\theta)h^2 + 2f_{xy}(P_\theta)hk + f_{yy}(P_\theta)k^2\right\}, \end{aligned} \tag{29}$$

dove $P_\theta = (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$.

Quanto osservato é riassunto nel seguente

Teorema 3.1 (Formula di Taylor di ordine 1). *Sia $f(x, y)$ di classe C^2 in A aperto di R^2: sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e sia $C(P_0, r)$ un cerchio di centro P_0 e raggio r tutto contenuto in A:*
$\forall P = (x_0 + h,\ y_0 + k) \in C(P_0, r)$ riesce

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k)$$

con

$$R(h, k) = \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x_\theta, y_\theta)h^2 + 2f_{xy}(x_\theta, y_\theta)hk + f_{yy}(x_\theta, y_\theta)k^2\right\}$$

essendo (x_θ, y_θ) un punto opportuno del segmento di estremi (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Si noti che l'errore di approssimazione R é presumibilmente

- tanto piú piccolo quanto piú $(x_0 + h, y_0 + k)$ é vicino a (x_0, y_0)
- tanto piú grande quanto piú (x_0+h, y_0+k) é lontano da (x_0, y_0)

In altri termini la formula di Taylor di primo ordine

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

fornisce approssimazioni *locali* di $f(x_0 + h, y_0 + k)$, buone su punti vicini a quello iniziale, h e k piccoli.

Proposizione 3.2. *Se le derivate seconde della funzione f verificano, tutte e tre la maggiorazione*

$$|f_{xx}| \leq M, \quad |f_{xy}| \leq M, \quad |f_{yy}| \leq M,$$

l'errore di approssimazione relativo alla precedente formula di Taylor di ordine 1, soddisfa la maggiorazione

$$|R| \leq \frac{1}{2} M \left\{ h^2 + 2|h||k| + k^2 \right\} \leq M(h^2 + k^2)$$

In altri termini l'errore che si puó commettere servendosi per valutare $f(x_0 + h, y_0 + k)$ della approssimazione di Taylor di primo ordine non supera

$$M(\sqrt{h^2 + k^2})^2$$

un multiplo del quadrato della distanza tra $(x_0 + h, y_0 + k)$ e (x_0, y_0).

Esempio 3.3. *Supponiamo ad esempio che non si accettino errori superiori ad* $1/10$ *e che riesca* $M = 10$: *l'algoritmo di approssimazione di Taylor di primo ordine, ovvero l'approssimazione col piano tangente, sarebbe stato accettabile, tenuto conto della precedente Proposizione, se*

$$\frac{1}{2} 10(|h| + |k|)^2 < 1/10 \quad \rightarrow \quad |h| + |k| < \frac{\sqrt{2}}{10}$$

cosa che accade certamente se il punto P appartiene al cerchio di centro P_0 e raggio $\sqrt{2}/20$.

Nel caso del precedente Esempio 1.1, $f(x, y) = 1 + \sin(x + y)$, la stima per le derivate seconde richiesta nella precedente Proposizione 3.2 é ben nota: $M = 1$.
Quindi

$$|f(x_0, y_0) - (1 + x_0 + y_0)| \leq \frac{1}{2}(|x_0| + |y_0|)^2$$

Nel caso del punto P_0 assegnato l'errore di approssimazione creato dall'algoritmo del piano tangente sarebbe stato non superiore a

$$\frac{1}{2}(0.01 + 0.02)^2 = 0.00045$$

Se tale quantitá rientra nelle tolleranze accettate l'approssimazione del piano tangente é stata un buon investimento: un calcolo rapidissimo e un risultato accettabilmente vicino al vero !

3.1. Una notazione vettoriale. Posto:

$$\begin{array}{lcl}
(x_0, y_0) & = & P_0, \\
(x_0 + h, y_0 + k) & = & P_0 + v, \\
f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k & = & \nabla f(P_0) \cdot v, \\
\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} & = & Hf(P_0)v \\
f_{xx}(P_0)h^2 + f_{xy}(P_0)hk + f_{yx}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 & = & Hf(P_0)v \cdot v
\end{array}$$

la espressione di Taylor di primo ordine, indicata nel Teorema 3.1 si scrive, in modo vettoriale, al modo seguente

$$f(P_0 + v) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot v + \frac{1}{2} Hf(P_\theta)v \cdot v. \tag{30}$$

Notate la struttura della (30):

- un termine costante $f(P_0)$,
- un termine lineare in v $\nabla f(P_0) \cdot v$,
- un termine quadratico in v

$$\frac{1}{2} Hf(P_\theta)v \cdot v$$

Si noti al analogia tra la (30) e la formula che si incontrava nel caso unidimensionale

$$\begin{array}{llllll}
F(t) = & F(t_0) & +F'(t_0) & (t - t_0) & +\frac{1}{2}F''(\theta) & (t - t_0)^2 \\
f(P) = & f(P_0) & +\nabla f(P_0) & PP_0 & +\frac{1}{2}Hf(P_\theta) & PP_0 \times PP_0
\end{array}$$

Osservazione 3.4. *La formula (30) vale anche nel caso di funzioni di $n \geq 3$ variabili!*
Chiaramente in tali casi P_0 sará un punto di $\mathbb{R}^n$, v, il vettore incremento in $\mathbb{R}^n$, ecc..

Bibliografia

[1] R.Courant, F.John *Introduction to Calculus and Analysis*, Volume I Springer

[2] R.Courant, F.John *Introduction to Calculus and Analysis*, Volume II Springer

[3] V.Smirnov *Corso di Matematiche Superiori*, Volume I e II Editori Riuniti.